Math. P.

43 gs

Bischoff

System

der

Elementar-Mathematik.

Von

Dr. Anton Bischoff,

Professor der Physik und Mathematik am k. b. Lyceum zu Amberg.

München

Erster Theil:

Die Algebra.

Regensburg.

Verlag von Georg Joseph Manz.

1853.

202 Cx

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorwort.

Als ich — vor nun fünfzehn Jahren — die Mathematik öffentlich zu lehren begann, fiel mir, der ich eben von der Schule Schellings kam, die willkührliche, nur einer äußern Ordnung, nicht aber einer innern Nothwendigkeit folgende Behandlung auf, welche so ziemlich die gesammte Elementar-Mathematik, namentlich die Geometrie bislang erfahren hatte. Aber gerade die Mathematik kann, wie keine andere Wissenschaft in der Ausdehnung, ohne irgend ein äußerlich Gegebenes aus ihrem bloßen Prinzipe in streng logischer Folgerung vollständig entwickelt werden: ich setzte mir daher die Aufgabe, dieß zum Behufe meiner Lehrvorträge zu thun; die Frucht hievon ist das System der Elementar-Mathematik, von dem hier der erste Theil, die Algebra, vorliegt.

Ueber die Tendenz und die Ausführung dieses ersten Theiles bemerke ich kurz Folgendes: Der Unterricht in der Mathematik überhaupt, in der Algebra insbesondere, verfolgt einen doppelten Zweck, einen disciplinären und

einen technischen. Auf den letztern nahm man in frühern Zeiten ausschließlich Bedacht, der Mechanismus des Rechnens ließ daher kaum etwas zu wünschen übrig; dieser Richtung entgegen hat Ohm seine Algebra geschaffen, durch deren rein wissenschaftliche Entwicklung er der disciplinären Bedeutung der Algebra für immer ihr Recht gesichert hat. Es ist nun die Aufgabe dieses Werkchens, beide Zwecke zugleich in innigster Verschmelzung der beiden bisher getrennten Richtungen zu verfolgen. Dahin zielt einerseits die in streng logischer Gliederung und Steigerung fortschreitende Entwicklung des gesammten Inhaltes aus Einem Prinzipe, — andrerseits die dieser Entwicklung sich jedesmal unmittelbar anschließende Anwendung in einer Reihe gleichfalls wohl gegliederter und stetig sich steigernder Aufgaben. Ob mir's so gelungen, das vorgesteckte Ziel zu erreichen, mag der gütige Leser selbst beurtheilen; ist es aber gelungen, so wird sich das Werkchen seinen Weg zum allgemeinen Lehrbuche, wozu es geschrieben ist, schon selbst bahnen.

Rosenheim, im September 1853.

Der Verfasser.

Inhalts-Verzeichniß.

Seite

Einleitung 1

Algebra.

Vorbegriffe 2

Erstes Buch.

Entwicklung der Rechnungsarten.

Erster Abschnitt.

Addition und Subtraction 5

Zweiter Abschnitt.

Multiplikation und Division 22

Dritter Abschnitt.

Die vier ersten Rechnungsarten zusammen 37

Addition und Subtraction von Aggregaten unter sich . . 56

Multiplikation von Aggregaten mit Aggregaten . . . 62

Division von Aggregaten durch Aggregate 67

Vierter Abschnitt.

Potenziren und Radiziren 81

Potenziren und Radiziren von Aggregaten 109

Binomischer Lehrsatz 139

Imaginäre Zahlen 154

Fünfter Abschnitt.

Logarithmiren 160

Anwendungen.

A. In der Buchstabenrechnung 168

B. In der Rechnung mit Zifferzahlen 172

Zweites Buch.

Gleichungen.

Seite

Einleitung 196

Erster Abschnitt.

Proportionen 198
Arithmetische Proportion 204
Anwendung der arithmetischen Proportion 212
Geometrische Proportion 217
Anwendung der geometrischen Proportion 229
Aufgaben der einfachen Proportion (Regel de tri) . . . 231
Aufgaben der zusammengesetzten Proportion 235
Reduktions-Aufgaben 247
1. Reduktion im Allgemeinen 247
2. Tara-Rechnung 250
3. Reduktion durch Zusammensetzung von Proportionen . . 251
Reesischer Ansatz 253
A. Bei der einfachen Proportion 253
B. Bei der zusammengesetzten Proportion 255
C. In Reduktions-Aufgaben 257
Theilung in proportionale Theile 258

Zweiter Abschnitt.

Gleichungen im engern Sinne 262
Vorbegriffe 262
I. Auflösung der Gleichungen 265
A. Gleichungen des ersten Grades 268
a) Mit Einer Unbekannten 268
b) Mit mehrern Unbekannten 272
c) Unbestimmte Gleichungen 292
B. Höhere Gleichungen 306
a) Quadratische Gleichungen 308
b) Kubische Gleichungen und höhere Gleichungen überhaupt . 322
II. Anwendung der Gleichungen 360
I. Aufgaben, welche auf Gleichungen des ersten Grades führen . 363
1. Mit Einer Unbekannten 363
2. Mit mehreren Unbekannten 369
3. Unbestimmte Aufgaben 375
II. Aufgaben, welche auf höhere Gleichungen führen . . . 385

Anhang.

	Seite
Von den Progressionen	391
A. Additive Reihen	392
B. Multiplikative Reihen	395
Arithmetische Progression	397
I. Ungeschlossene Reihe	397
II. Geschlossene Reihe	399
III. Rechnerisches	401
Geometrische Progression	406
I. Ungeschlossene Reihe	406
II. Geschlossene Reihe	407
III. Rechnerisches	411
Werthberechnungen nach Zinseszinsen	418
A. Werthbestimmung eines einzelnen Betrages	419
B. Werthbestimmung periodisch wiederkehrender Beträge . .	421
C. Werthbestimmung von einzelnen in Verbindung mit periodischen Beträgen	426
Aufgaben	441

Einleitung.

Die Mathematik ist die Lehre vom Raume.

Der Raum ist

a) theilbar,
b) getheilt.

Wird die nach dem ersten Theile dieses Prinzipal-Satzes der Mathematik mögliche Theilung des Raumes wirklich ausgeführt, so entsteht die Geometrie; werden aber die nach dem zweiten vorhandenen Theile des Raumes

1) an sich betrachtet,
2) verglichen,
3) verbunden,

so entsteht die Algebra.

Algebra.

Vorbegriffe.

§. 1.

Die vorhandenen Theile des Raumes können in der (reinen) Raumeslehre natürlich nur als solche, nicht in andern Beziehungen betrachtet werden; so betrachtet ist jeder Theil, oder wie wir einen unbestimmten Raumestheil gewöhnlich nennen, jedes Ding eines für sich oder eine Einheit. Diese ganz prädikatlosen Einheiten können daher auch nicht mit einander verglichen werden, wohl aber deren mehrere zu einer Gesammt-Einheit verbunden; eine solche heißt dann eine Zahl. Eine Zahl ist mithin eine gewisse Menge von Einheiten.

§. 2.

1) Betrachten wir die Zahlen an sich, so könnten
   a) die Einheiten bestimmte oder unbestimmte sein und darnach benannte und unbenannte Zahlen unterschieden werden; da aber die reine Raumeslehre bestimmte Einheiten nicht kennt, so hat es die Algebra auch nicht mit benannten Zahlen zu thun.
   b) Wohl aber kann die Menge eine bestimmte oder unbestimmte sein, und hienach sind die Zahlen selbst bestimmte oder unbestimmte.
2) Will man die Zahlen miteinander vergleichen, so kann dieß nicht in Absicht auf ihre Einheiten geschehen, weil diese als unbestimmte auch nicht vergleichbar sind, sondern nur in Absicht auf ihre Mengen, und zwar heißen:

a) zwei Zahlen gleich, wenn die eine so viele Einheiten enthält als die andere; sonst aber ungleich, nämlich
b) diejenige größer als eine andere, welche mehr Einheiten enthält als diese; umgekehrt diese kleiner.

Anmerkung. Ein Satz, in welchem ausgesprochen wird, daß zwei Zahlen oder die sie darstellenden Ausdrücke einander gleich sind, wird eine Gleichung genannt.

3) Was endlich die Verbindung der Zahlen betrifft, so wird hier im Allgemeinen voraus bemerkt, daß das Verbinden von Zahlen Rechnen heißt, und jede besondere Art, dieß zu thun, eine besondere Rechnungsart.

§. 3.

Sowohl für die Zahlen selbst als auch für deren Verglei-chungen und Verbindungen bedient man sich gewisser Zeichen, welche theils nothwendig sind, wie bei den unbestimmten Zahlen, theils willkührlich, jedenfalls aber zur Abkürzung und besseren Uebersichtlichkeit dienen. Was nun die Bezeichnung der Zahlen be-trifft, so müssen:

a) die Zeichen für bestimmte Zahlen auch bestimmte sein; sie heißen Ziffern.

Da offenbar nicht für alle Zahlen eigene Zeichen möglich sind, so muß die Bezeichnung der Zahlen durch Ziffern in ein eigenes System gebracht werden. Von solchen Systemen ist das gebräuch-lichste das dekadische, in welchem je 10 Einheiten in eine Gesammt-Einheit verbunden werden, die sodann wieder mit der nämlichen Ziffer bezeichnet, aber durch die Stellung kenntlich ge-macht wird.

Ein zweites dieser Systeme ist das dodekadische, in welchem je 12 Einheiten eine Gesammt-Einheit bilden. So entsprechen sich, um ein Beispiel zu geben, folgende Ziffern:

imdek adischen System — 12, 20, 22, 23, 24, 35, 36, 60, 100.
im dodekadischen System — 10, 18, 1δ, 1ε, 20, 2ε, 30, 50, 84 u. s. w.

wobei δ für 10, und ε für 11 des dekadischen Systems gilt. Ebenso könnte man auch jede andere beliebige Menge von Einhei-ten zu einer Gesammt-Einheit vereinigen, und so eine Menge Zahl-eigentlich Ziffersysteme schaffen.

b) Für die Bezeichnung unbestimmter Zahlen hat man Buchstaben gewählt, weil man weder Ziffern dafür wählen konnte, noch wohl ganz neue Zeichen wählen durfte, indem man über letztere erst allgemein hätte überein kommen müssen.

Wegen dieser Bezeichnung ihrer Zahlen mit Buchstaben wird die Algebra häufig auch Buchstabenrechnung genannt, freilich oft zum großen Mißverständniß!

c) Die Zeichen für die Vergleichung sind die bekannten: $=$ oder gleich, $>$ oder größer, $<$ oder kleiner.

d) Die Zeichen für die Verbindungen endlich werden bei den einzelnen Verbindungen selbst namhaft gemacht.

Erstes Buch.

Entwicklung der Rechnungsarten.

Erster Abschnitt.

Addition und Subtraktion.

§. 4.

1. Die einfachste Verbindung zweier Zahlen ist offenbar die, sie in Eine zu vereinigen (wie man zwei Häufchen Bohnen in Eines zusammenschiebt). Diese Verbindung nennt man Addition.

Das Zeichen derselben besteht darin, daß man zwischen die verbundenen Zahlen das bekannte Zeichen (+) setzt, welches man mit „plus“ liest. Der Ausdruck dieser Verbindung ist:

$$a + b = (a + b),^{*})$$

in welchem Ausdrucke a und b die Summanden, (a + b) die Summe heißt.

Eine Summe ist also eine Zahl, welche allein so viele Einheiten enthält, als zwei andere Zahlen, ihre Summanden, zusammen genommen.

Anmerkung. Die Klammer, welche im Ausdrucke der Summe die Zahlen a und b einschließt, soll, wie in allen folgenden Fällen, eben andeuten, daß das Eingeschlossene Eine Zahl ist.

---

*) Man dürfte hier keineswegs $a + b = c$ setzen, denn wenn man statt der unbestimmten Zahlen a und b bestimmte setzt, so bleibt doch c noch immer unbestimmt, während die Summe zweier bestimmten Zahlen offenbar selbst eine bestimmte Zahl sein muß; hingegen sind im Ausdrucke $a + b = (a + b)$ die Summanden und die Summe immer zugleich bestimmt, oder zugleich unbestimmt.

2. Es ist offenbar einerlei, ob man zur Zahl a die Zahl b, oder umgekehrt zur Zahl b die Zahl a fügt; die Menge der Einheiten, welche beide Zahlen zusammen haben, oder deren Summe, bleibt immer dieselbe. Es ist also:

$$(a + b) \overset{I}{=} (b + a),^{*})$$

d. h. eine Summe bleibt sich gleich, wenn auch ihre Summanden versetzt werden (erster Grundsatz).

3. Da demgemäß mit der Verwechslung der Summanden eine andere Verbindung nicht gegeben ist, so müssen wir darauf denken, zwischen den Zahlen, die wir bis jetzt kennen, eine solche andere Verbindung zu suchen.

Verbinden wir nun die Summe mit dem einen Summanden, um den andern zu erhalten, so ist dieß offenbar eine neue Verbindung; wir nennen sie Subtraktion.

Das Zeichen derselben besteht darin, daß man zwischen die Summe und den gegebenen Summanden das Zeichen (—) setzt, welches mit „minus“ gelesen wird. Bezeichnen wir die Summe mit a und den gegebenen Summanden mit b, so ist der Ausdruck dieser Verbindung:

$$a - b = (a - b).$$

Da hier eine neue Rechnungsart vorliegt, so müssen wir, um der Verwirrung vorzubeugen, den hier vorkommenden Zahlen auch neue Namen geben. Die Summe a heißt nun Minuend, der gegebene Summand b Subtrahend, der gesuchte Summand (a — b) Differenz.

4. Der ganzen Ableitung zufolge hat die Subtraktion die Bedeutung, die Addition wieder rückgängig zu machen, d. h. die beiden Summanden aus der Summe wieder gesondert darzustellen. Dieß geschieht offenbar dadurch, daß ich von der Gesammt-Menge (Summe) die eine Menge (den einen Summanden) hinwegnehme, worauf sich auch die andere Menge (der andere Summand) für sich allein darstellt.

Diese Bedeutung des Hinwegnehmens, woher auch der Name Subtraktion, darf nicht übersehen werden; aus ihr geht auch her-

---

*) Durch die über das Gleichheitszeichen gesetzte Ziffer zeigen wir auch in der Folge immer den Grundsatz oder das Gesetz an, vermöge dessen die Gleichheit stattfindet.

vor, daß es nicht dieselbe Verbindung wäre, wenn man den einen Summanden mit der Summe verbände, um den andern Summanden zu erhalten, daß also nicht $a - b = b - a$, sondern daß die letztere Verbindung gar keinen Sinn habe, indem man von dem Theile nicht das Ganze hinwegnehmen kann.

§. 5.

Setzen wir die beiden, bis jetzt gefundenen Rechnungsarten in der Art in gegenseitige Beziehung zu einander, daß wir

a) auf den Ausdruck der ersten Rechnungsart die Definition der zweiten,

b) auf den Ausdruck der zweiten die Definition der ersten Rechnungsart anwenden, so erhalten wir zwei wichtige Sätze, die wir als zweiten und dritten Grundsatz festhalten.

Es ist nämlich a) $(a \overset{s}{+} b) \overset{sd}{-} b \overset{II}{=} a^{sd}$

b) $(a \overset{sd}{-} b) \overset{sd}{+} b \overset{III}{=} a^{s}$

oder den Grundsatz II mit den Benennungen der ersten,

den Grundsatz III mit denen der zweiten Rechnungsart gelesen, gilt:

a) wenn man von einer Summe den einen Summanden subtrahirt, so erhält man den andern;

b) wenn man zu einer Differenz ihren Subtrahend addirt, erhält man den Minuend.

§. 6.

Wenn wir zwei Summen $a + b$ und $c + d$, oder zwei Differenzen $a - b$ und $c - d$ mit einander vergleichen, so sind drei Fälle möglich; es können nämlich:

1) beide Zahlen des einen Ausdruckes beiden Zahlen des andern gleich sein,

2) je eine Zahl in beiden Ausdrücken gleich, die andere ungleich, oder

3) beide Zahlen des einen Ausdruckes ungleich denen des andern.

ad 1) Ist $\left.\begin{matrix} a = c \\ b = d \end{matrix}\right\} II\ 1$

so ist $\left.\begin{matrix} a + b \overset{IV}{=} c + d \\ a - b \overset{IV}{=} c - d \end{matrix}\right\}$ gemäß den Grundbegriffen von Addition und Subtraktion,

d. h. Gleiches zu Gleichem addirt, oder Geiches von Gleichem subtrahirt, gibt Gleiches, welchen Satz wir als vierten Grundsatz (IV) festhalten wollen.

ad 2) Ist $1)\ \begin{cases} a = c \\ b > d \end{cases}$ oder $2)\ \begin{cases} a > c \\ b = d \end{cases}$

so ist sowohl 1) $a + b > c + d$, als auch 2) $a + b > c + d$

hingegen 1) $a - b < c - d$, während 2) $a - b > c - d$,

das Alles wieder gemäß den Grundbegriffen der beiden Rechnungsarten.

Aus der Vergleichung der beiden Summen geht also in beiden Fällen der Satz hervor:

Wenn man zu Gleichem Ungleiches, oder umgekehrt, addirt, so erhält man Ungleiches, und zwar ist die Summe die größere, welche von den ungleichen Summanden den größeren enthält;

aus der Vergleichung der beiden Differenzen aber

im ersten Falle:

Wenn man von Gleichem Ungleiches subtrahirt, so erhält man Ungleiches, und zwar die kleinere Differenz auf der Seite, auf welcher der größere Subtrahend ist;

im zweiten Falle:

Wenn man von Ungleichem Gleiches subtrahirt, so erhält man Ungleiches, und zwar die größere Differenz auf der Seite, auf welcher der größere Minuend steht.

ad 3) Sind beide Zahlen des einen Ausdruckes beiden des andern ungleich, so ist das Verhältniß der beiden Summen, wie der beiden Differenzen ein gänzlich unbestimmtes. Eben in dieser Unbestimmtheit aber liegt auch die Möglichkeit, daß die beiden Summen oder die beiden Differenzen einander gleich seien, daß also

$$a + b = c + d$$

oder $a - b = c - d$ sei; solche Gleichungen heißen Proportionen.

Anmerkung. Diese Proportionen, wie überhaupt die unbestimmten Gleichungen zwischen Summen und Differenzen ꝛc. werden im zweiten Buche weitläufiger behandelt werden.

§. 7.

Eine weitere Aufgabe ist, zu zeigen, wie die Summen und Differenzen selbst wieder durch die beiden bisher gefundenen Rechnungsarten mit Zahlen verbunden werden.

Die vier möglichen Aufgaben sind:

1) Zu einer Zahl wird eine Summe addirt,
2) " " Differenz addirt,
3) von " " Summe subtrahirt,
4) " " " Differenz subtrahirt.

Erste Aufgabe.

$$a + (b + c) \overset{1}{=} (a + b) + c$$

Beweis. Bei dieser Aufgabe liegt es zunächst, zur Zahl a den Summand b zu addiren, und man erhält somit die Summe $(a + b)$; aber die Summe $(b + c)$, d. i. die Menge der Einheiten **beider** Summanden sollte addirt werden, nicht bloß die des Summands b, mithin muß zur Summe $(a + b)$ noch die Menge der Einheiten c des zweiten Summands addirt werden, und wir haben, wie oben

$$a + (b + c) \overset{1}{=} a, + b) + c$$

Mit Worten: Zu einer Zahl wird eine Summe addirt, indem man zur Zahl den einen Summanden und zu der dadurch erhaltenen Summe den andern Summanden addirt.

Zweite Aufgabe.

$$a + (b - c) \overset{2}{=} (a + b) - c$$

Beweis. Hier liegt zunächst, zur Zahl a den Minuend b zu addiren, wodurch man die Summe $(a + b)$ erhält; aber die Aufgabe ist, die Differenz $(b - c)$, [d. h. von der Summe b, deren einer Summand c und deren anderer $(b - c)$ ist, diesen letzteren $(b - c)$] zu addiren. Nun haben wir aber b, d. h. die Summe oder was dasselbe ist, beide Summanden addirt, wir müssen also denjenigen Summanden c, welchen wir nicht hätten addiren sollen, aus der Gesammtsumme $(a + b)$ wieder entfernen, was nach Grundsatz II dadurch geschieht, daß wir ihn davon subtrahiren. Mithin haben wir

$$a + (b - c) \overset{2}{=} (a + b) - c$$

Mit Worten: Zu einer Zahl wird eine Differenz addirt, indem man zur Zahl den Minuend addirt und von der dadurch erhaltenen Summe den Subtrahend subtrahirt.

Dritte Aufgabe.

$$a - (b + c) \overset{3}{=} (a - b) - c$$

Hier liegt einem zunächst, von der Zahl a den Summanden b zu subtrahiren, wodurch man die Differenz (a — b) erhält. Die Aufgabe muß aber so gefaßt werden, als sei a eine Summe, von welcher die Summe (b + c) selbst ein Summand ist, der aus der Summe a entfernt werden soll. Nun ist durch die vorige Operation mit (a — b) wohl der Summand b entfernt, aber der Summand c noch in (a — b) enthalten; um auch diesen zu entfernen, wird er nach II subtrahirt, und wir haben, wie oben,

$$a - (b + c) \overset{3}{=} (a - b) - c$$

Mit Worten: Von einer Zahl wird eine Summe subtrahirt, indem man von der Zahl den einen Summanden subtrahirt und von der dadurch erhaltenen Differenz auch noch den andern.

Vierte Aufgabe.

$$a - (b - c) \overset{4}{=} (a - b) + c$$

Hier liegt es zunächst, von der Zahl a den Minuend b zu subtrahiren, wodurch man die Differenz (a — b) erhält. Dadurch aber hat man von a die ganze Summe b, also nach 3) beide Summanden c und (b — c) hinweggenommen, während bloß der letztere (b — c) hätte hinweggenommen werden sollen. Mithin muß der andere Summand c wieder hinzugefügt, d. h. addirt werden, und wir haben sonach, wie oben,

$$a - (b - c) \overset{4}{=} (a - b) + c$$

Mit Worten: Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahirt, indem man von der Zahl den Minuend subtrahirt und zur erhaltenen Differenz den Subtrahend addirt.

§. 8.

Nachdem wir die Gesetze aufgefunden haben, nach welchen mit den Zahlen die Summen und Differenzen durch Addition und Subtraktion verbunden werden, bleibt noch die umgekehrte Aufgabe übrig, mit den Summen und Differenzen durch dieselben Rech-

nungsarten die Zahlen zu verbinden. Auch hier sind vier einzelne Aufgaben, vorhanden:

1) zu einer Summe eine Zahl zu addiren,
2) von = Summe = = = subtrahiren,
3) von = Differenz = = = subtrahiren,
4) zu = = = = = addiren.

Betrachten wir nun in den vier aufgefundenen Gesetzen die zweiten Seiten oder die bisherigen Auflösungen als die Aufgaben, so stimmen sie der Reihe nach mit den eben hier gestellten vier Aufgaben überein; wir haben daher auch für diese die Auflösungen, wenn wir unsere vier Gesetze umgekehrt lesen.

Mithin 1) $(a + b) + c \overset{\overline{1}}{=} a + (b + c)$ *)

2) $(a + b) - c \overset{\overline{2}}{=} a + (b - c)$

3) $(a - b) - c \overset{\overline{3}}{=} a - (b + c)$

4) $(a - b) + c \overset{\overline{4}}{=} a - (b - c)$

Mit Worten: $\overline{1}$) Zu einer Summe wird eine Zahl addirt, indem man zu dem einen Summanden addirt die Summe aus dem andern Summanden und der Zahl.

$\overline{2}$) Von einer Summe wird eine Zahl subtrahirt, indem man zu dem einen Summanden addirt die Differenz aus dem andern Summanden und der Zahl.

$\overline{3}$) Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, indem man vom Minuend subtrahirt die Summe aus dem Subtrahend und der Zahl.

$\overline{4}$) Zu einer Differenz wird eine Zahl addirt, indem man vom Minuend subtrahirt die Differenz aus dem Subtrahend und der Zahl.

Anmerkung. Die Aufgabe des vierten direkten Gesetzes kann noch auf eine andere Weise gelöst werden, welche Lösung auf ein weiteres, das sogenannte vierte Nebengesetz führt.

Es ist nämlich

---

*) Der Querstrich über den Nummern der Gesetze soll andeuten, daß diese die den vorigen Gesetzen entsprechenden umgekehrten oder indirekten sind.

$$a - (b - c) \overset{4}{=} (a - b) + c$$
$$\overset{1}{=} c + (a - b),$$
$$\overset{2}{=} (c + a) - b,$$
$$\overset{1}{=} (a + c) - b,$$
$$\text{mithin} \quad a - (b - c \overset{4'}{=} (a + c) - b.$$

Mit Worten: Von einer Zahl wird eine Differenz subtrahirt, indem man zur Zahl den Subtrahend addirt, und von der erhaltenen Summe den Minuend subtrahirt.

§. 9.

Die Wahrheit der vier, resp. fünf aufgestellten Gesetze folgt zwar ohnehin aus der Richtigkeit ihrer Ableitung aus den vorangestellten Begriffen von Addition und Subtraktion, Summe und Differenz; es möchte jedoch nicht unzweckdienlich sein, wenigstens die drei, resp. vier letzteren auch noch in streng mathematischer Form zu beweisen. Das bei diesen und den folgenden Beweisen der beiden ersten Rechnungsarten zu beobachtende Verfahren ist folgendes:

Man sehe, welche Seite der Gleichung eine Differenz sei, addire den Subtrahend dieser Differenz (wenn beide Seiten Differenzen sind, den aus mehr Theilen zusammengesetzten Subtrahend) nacheinander zu beiden Seiten der Gleichung und entwickle diese Summen; sind nun die beiden so erhaltenen Summen, allgemein Resultate, gleich, so macht man den Schluß, daß auch die ursprünglichen Ausdrücke, d. h. die gegebenen Seiten der Gleichung einander gleich sind, und sonach die Gleichung wahr ist, weil nach §. 6. nur Gleiches zu Gleichem addirt, Gleiches gibt.

Beweis des zweiten Gesetzes.

$$a + (b - c) = (a + b) - c$$

$$1)\ \overset{M}{[}(a + b) \overset{Sb}{-} c\overset{Sb}{]} \overset{III}{+} c = \underline{a + b}$$

$$2)\ \overset{Sd}{[}a + (b \overset{Sd}{-} c)\overset{Z}{]} \overset{I}{+} c = a + \overset{M}{[}(b \overset{Sb}{-} c) \overset{Sb}{+} c] \overset{III}{=} \underline{a + b}$$

Beweis des dritten Gesetzes.

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

1) $[a - (b + c)]^{M\ Sb} + (b + c)^{Sb} = a^{III}$

2) $[(a - b)^{Z} - c] + (b + c)^{Sd\ Sd} = \{[(a - b)^{M} - c]^{Sb} + c\}^{Sb} + b$
$= (a - b) + b^{III\ M\ Sb\ Sb}$
$= a^{III}$

Beweis des vierten Hauptgesetzes.

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

1) $[a - (b - c)]^{M\ Sb} + (b - c)^{Sb} = a^{III}$

2) $[(a - b) + c]^{Sd\ Sd} + (b - c)^{Z} = (a - b) + [c + (b - c)]^{Sd\ Sd}$
$= (a - b) + [(b - c) + c]^{I\ M\ Sb\ Sb}$
$= (a - b) + b^{III\ M\ Sb\ Sb}$
$= a^{III}$

Beweis des vierten Nebengesetzes.

$$a - (b - c) = (a + c) - b$$

1) $[a - (b - c)]^{M\ Sb} + (b - c)^{Sb} = a^{III}$

2) $[(a + c) - b]^{Z} + (b - c)^{M\ Sb} = \{[(a + c) - b]^{M\ Sb} + b\}^{Sb} - c$
$= (a + c) - c^{III\ Sd\ Sd\ Sd}$
$= a^{II}$

Anmerkung 1. Was den Gebrauch der Klammern im Vorstehenden und so auch in der Folge betrifft, bemerke ich hierüber Folgendes:

Wir kennen bisher nur Summen aus zwei Summanden und Differenzen, welche ohnehin nur zwei Theile haben können; kommt also zu einem Ausdrucke, der bereits aus zwei Theilen besteht, noch ein dritter Theil, so muß jener zweitheilige Ausdruck durch eine Klammer bestimmt als Summe oder als Differenz, was von beiden er eben ist, unterschieden werden und bildet jetzt in die Klammer gefaßt nur mehr einen Theil, für welchen der hinzugekommene dritte Theil nun der zweite ist. Käme zu diesen zweien wie-

der ein weiterer Theil, so wird eine zweite Klammer nöthig, und sofort eine dritte, vierte u. s. w. Der größeren Deutlichkeit und in der Schule der besseren Uebereinstimmung wegen ist es gut, die Klammern von bestimmter Form in bestimmter Ordnung aufeinander folgen zu lassen, etwa eine r u n d e Klammer (.....) als erste, eine e c k i g t e [.....] als zweite, eine g e s c h w e i f t e {.....} als dritte, als vierte, fünfte und sechste wieder solche, aber größere ꝛc.

A n m e r k u n g 2. Es ist beinahe unumgänglich nothwendig, namentlich bei den schriftlichen Arbeiten, die Schüler anzuhalten, über diejenigen Theile der Aufgabe, mit welchen jeweilig gerechnet wird, die ihnen zukommenden Benennungen, als: Summand (Sd), Minuend (M), Subtrahend (Sb) oder Zahl (Z) zu setzen, wie das beispielsweise auch in den obigen Beweisen geschehen ist.

§. 10.

Es könnte nun die weitere Frage aufgeworfen werden: „wie werden Summen mit Summen, Differenzen mit Differenzen ꝛc. durch die beiden Rechnungsarten verbunden?“ — Aber wenn wir bedenken, daß jede Summe oder Differenz beliebig auch als Zahl betrachtet werden könne, so finden alle aus dieser Frage hervorgehenden Aufgaben ihre Lösung schon in den bisher aufgestellten Gesetzen. Dennoch führt die Beantwortung obiger Frage, wenn man damit die weitere Forderung verbindet, daß wie die Aufgabe so auch die Auflösung nur zweitheilige Theile enthalte, nicht bloß zu mehreren nicht unwichtigen algebraischen Sätzen, sondern gibt insbesondere dem Schüler Gelegenheit, einerseits sich Fertigkeit und Genauigkeit in der Anwendung der betreffenden algebraischen Gesetze zu verschaffen, andrerseits die Uebung, bald algebraisch bezeichnete Sätze mit Worten, bald mit Worten ausgesprochene algebraisch wieder zu geben. Aus einigen Beispielen mag dieß noch deutlicher erhellen.

1) Die Differenz zweier Summen soll in die Summe zweier Differenzen verwandelt werden.

$$\text{Aufl.}\quad (a \overset{Z}{+} b) - (c \overset{Sd}{+} d) \overset{3}{=} [(a \overset{Sd}{+} b) \overset{Z}{-} c] - d$$

$$\overset{2}{=} [b \overset{Sd}{+} (a \overset{Sd}{-} c)] \overset{Z}{-} d$$

$$\overset{2}{=} (a - c) + (b - d)$$

2) Der Satz: $(a + b) - (b + c) = a - c$ soll direkt und indirekt mit Worten gelesen, und sodann bewiesen werden.

Aufl. Direkt: Eine Differenz bleibt sich gleich, wenn man vom Minuend wie vom Subtrahend die gleiche Zahl subtrahirt — indirekt: eine Differenz bleibt sich gleich, wenn man zum Minuend wie zum Subtrahend die gleiche Zahl addirt.

Beweis. $[(a + b) - (b + c)] + (b + c) \overset{M}{=} \overset{Sb}{\underline{a + b}}$

$(a - c) + (b + c) \overset{Z}{=} [(a - c) + c] + b$

$\overset{Sd\ Sd}{=} \overset{1}{=} \overset{M\ Sb}{=} \overset{Sb}{=}$

$\overset{III}{=} \underline{a + b}$

Aehnliche Aufgaben sind:

1) Die Differenz zweier Differenzen
   a) in eine Summe,
   b) in eine andere Differenz zu verwandeln;
2) die hiedurch erhaltenen Sätze mit Worten zu geben und zu beweisen;
3) $(a - c) - (a - b) = b - c$ mit Worten zu geben und zu beweisen, und dgl. mehr.

§. 11.

Eine anderweitige nicht zu übergehende Uebung erwächst dem Schüler aus der Vereinfachung solcher Ausdrücke, in welchen eine oder mehrere Zahlen doppelt vorkommen, und zwar in der Art, daß dieselben nach gewissen gemäß den algebraischen Gesetzen gemachten Umformungen sich mit Hilfe des zweiten oder dritten Grundsatzes entfernen lassen. Zur Erläuterung des Gesagten hier einige Beispiele:

1) $[(a \overset{Z}{-} b) + c] + \{\overset{M}{b} - [c - \overset{Sb}{(f - a)}]\} =$

$\overset{2}{=} \{[(a \overset{Sd}{-} b) + \overset{Sd}{c}] + \overset{Z}{b}\} - [c - (f - a)]$

$\overset{I}{=} \{c + \overset{M\ Sb}{[(a - b) +} \overset{Sb}{b}]\} - [c - (f - a)]$

$\overset{III}{=} (c \overset{Z}{+} a) - [c \overset{M}{-} \overset{Sb}{(f - a)}]$

$\overset{4}{=} \overset{Sd\ Sd\ Sd}{[(c + a) - c]} + (f - a)$

$\overset{II\ Sd}{=} a + \overset{Sd}{(f - a)}$

$\overset{I\ M\ Sb\ Sb}{=} (f - a) + a$

$\overset{III}{=} f.$

$$2)\quad \{f-[d\overset{Z}{-}(h+1)]\}+\{[d-(h-c)]-(f\overset{Sb}{+}1)\}=$$

$$\overset{2}{=}\Big(\{f\overset{Z}{-}[d\overset{M}{-}(h\overset{Sb}{+}1)]\}+[d-(h-c)]\Big)-(f+1)$$

$$\overset{4'}{=}\Big(\{[f+(h\overset{Z}{+}1)]-d\}+[d\overset{M}{-}(h-c)\overset{Sb}{)}]\Big)-(f+1)$$

$$\overset{2}{=}\Big[\Big(\{[f+(h\overset{M}{+}1)]-d\}\overset{Sb}{+}d\Big)-(h-c)\Big]-(f+1)$$

$$\overset{III}{=}\{[f\overset{Sd}{+}(h\overset{Sd}{+}1)]-(h\overset{Z}{-}c)\}-(f+1)$$

$$\overset{2}{=}\{f+[(h\overset{Z}{+}1)-(h\overset{M}{-}c\overset{Sb}{)}]\}-(f+1)$$

$$\overset{4}{=}\Big(f+\{[(h\overset{Sd}{+}1)\overset{Sd}{-}h]\overset{Sd}{+}c\}\Big)-(f+1)$$

$$\overset{II}{=}[f+(1\overset{Z}{+}c)]-(f\overset{Sd}{+}1\overset{Sd}{)}$$

$$\overset{3}{=}\{[f\overset{Sd}{+}(1+c)]\overset{Sd}{-}f\}-1$$

$$\overset{II}{=}(1\overset{Sd}{+}c)\overset{Sd}{-}1$$

$$\overset{II}{=}\underline{c}\,.$$

§. 12.

Wir haben bisher die Summen und Differenzen durch Klammern bestimmt als solche unterschieden, und wir konnten auf unserm jetzigen Standpunkte ohne die Klammern auch gar nicht rechnen, weil die Anwendung unserer algebraischen Gesetze durchaus jene Unterscheidung fordert. Ein Anderes aber ist es, wenn es sich darum fragt, ob die Klammern durchaus nothwendig sind, wenn unsere aufgestellten Gleichungen wahr sein sollen. In dieser Beziehung nun findet sich:

1) Die Gleichungen des ersten und zweiten Gesetzes bleiben wahr, auch wenn die Klammern hinweggelassen werden: denn sowohl $a+b+c=a+b+c$ als auch $a+b-c=a+b-c$. Für die Wahrheit dieser Gleichungen ist es mithin gleichgiltig, ob die Klammern da sind oder nicht, sie können also nach Belieben gesetzt oder weggelassen werden.

Untersuchen wir nun, was das für Klammern sind, von denen dieß gilt, so sind es

a) auf den beiden zweiten Seiten der fraglichen Gleichungen solche, die einen Ausdruck am Anfange,

b) auf den beiden ersten Seiten solche, die einen Ausdruck nach einem + Zeichen einschließen. Daraus folgt:

„Ausdrücke, d. h. Summen oder Differenzen, die am Anfange oder nach einem + Zeichen stehen, können nach Belieben in Klammern gefaßt werden oder nicht."

2) Nicht aber bleiben die Gleichungen des dritten und vierten Gesetzes wahr, wenn die Klammern weggelassen werden; denn $a - b + c$ ist nicht $= a - b - c$, eben so wenig $a - b - c = a - b + c$. Da aber auch hier nach dem unter 1) Gesagten die Klammern auf den beiden zweiten Seiten als am Anfange stehend weggelassen werden dürfen, so beschränkt sich die Nothwendigkeit der Beibehaltung der Klammern auf die beiden ersten Seiten, wo die in Klammern stehenden Ausdrücke nach einem „minus" Zeichen stehen. Daraus folgt:

„Ausdrücke, welche nach einem „minus" Zeichen stehen, müssen in Klammern eingeschlossen bleiben; umgekehrt kann auch nach einem „minus" Zeichen nicht beliebig eine Klammer gesetzt werden." —

Die Ausdrücke $a + b - c$, $a - b - c$, $a - b + c$, die nach dem Gesagten der Wahrheit unbeschadet zulässig sind, haben dennoch bis jetzt keinen Sinn, indem sie weder Summen noch Differenzen sind, wir aber bis jetzt etwas Anderes nicht kennen. Es wird also nothwendig, diesen Aggregaten (so heißen wir derlei Ausdrücke, in welchen mehrere Zahlen ohne Unterschied mit den Zeichen + und — auf einander folgen) eine bestimmte Bedeutung zu suchen. Da aber die Existenz solcher Aggregate offenbar mit der der Differenzen zusammenhängt, indem nur die Letzteren auf die Ersteren führen, so wird es nothwendig sein, zuerst das Wesen der Differenzen genauer zu untersuchen.

§. 13.

Dem Begriffe der Subtraktion zufolge ist in der Differenz $a - b$ die Zahl a eine Summe, von welcher die Zahl b der eine Summand; mithin sollte, wenn die Differenz einen Sinn haben soll, immer $a > b$ sein. Nun sind aber a und b unbestimmte Zahlen, die jeden beliebigen Werth haben können; daher kann

1) $a > b$ sein, in welchem Falle die Differenz eine wahre ist;

2) $a = b$ } in welchen beiden Fällen die Differenz $a - b$ keinen rechten Sinn hat, und daher im Gegensatze
3) $a < b$ } zur wahren als falsche Differenz zu bezeichnen ist.

Die erste sich hier aufdrängende Frage ist wohl die, ob überhaupt mit solchen falschen Differenzen gerechnet werden dürfe. Wenn man nun bedenkt, einerseits, daß man auch bei der Rechnung mit falschen Differenzen dennoch oft auf ein wahres Resultat kommt, wie aus den Beispielen: $11 + (3 - 8) = (11 + 3) - 8 = 6$ oder $11 - (3 - 8) = (11 - 3) + 8 = 8 + 8 = 16$ hervorgeht, andrerseits daß man, so lange man mit unbestimmten Zahlen rechnet, ohnehin die falschen Differenzen nicht ausschließen kann, so kann obige Frage nicht anders als bejaht werden. Daraus entsteht dann die Aufgabe:

a) die beiden Arten der falschen Differenzen nach ihren Eigenschaften zu untersuchen;
b) zu zeigen, wie mit ihnen gerechnet werden könne.

§. 14.

ad a) 1) Eine falsche Differenz der ersten Art, deren Minuend = dem Subtrahend, ist offenbar $a - a$ oder $b - b$. Vergleicht man nun zwei solche Differenzen mit einander, so findet sich, daß sie einander gleich sind, nämlich

$$a - a = b - b$$

Beweis. $(a - a) + a \overset{III}{=} a$

$$(b - b) + a \overset{4}{=} b - (b - a),$$
$$\overset{4'}{=} (b + a) - b;$$
$$\overset{II}{=} a.$$

Weil denn, so wie diese, alle Differenzen der ersten Art einander gleich sind, werden sie auch alle mit Einem Zeichen, nämlich mit 0 bezeichnet.

2) Eine falsche Differenz der zweiten Art, deren Minuend kleiner als der Subtrahend, kann nicht durch $a - b$ bestimmt als solche bezeichnet werden, weil diese Differenz eine durchaus unbestimmte ist, sondern muß durch eine Differenz ausgedrückt werden,

deren Subtrahend eine Summe ist, von welcher der Minuend der eine Summand, etwa durch $a-(a+b)$.

Es ist aber $a-(a+b) \overset{3}{=} (a-a)-b = 0-b$, d. h. jede falsche Differenz der zweiten Art läßt sich in eine solche verwandeln, deren Minuend $=0$ ist.

Man ist übereingekommen, diese 0 gewöhnlich wegzulassen, und den übrigen Theil der Differenz $(-b)$ eine negative Zahl zu nennen. Zum Unterschiede davon heißt dann die Zahl b selbst oder $+b$ eine positive Zahl.

ad b) 1) $a+0 = a+(b-b) \overset{2}{=} (a+b)-b \overset{II}{=} a$;

$$a-0 = a-(b-b) \overset{4}{=} (a-b)+b \overset{III}{=} a;$$

d. h. ob man 0 zu einer Zahl addirt oder davon subtrahirt, die Zahl bleibt immer unverändert.

2) $a+(-b) = a+(0-b) = (a+0)-b = a-b$,

d. h. zu einer Zahl wird eine negative Zahl addirt, indem man von der ersten Zahl die zweite Zahl selbst oder die positive Zahl subtrahirt.

$$a-(-b) = a-(0-b) \overset{1}{=} (a-0)+b = a+b,$$

d. h. von einer Zahl wird eine negative Zahl subtrahirt, indem man zur ersten Zahl die zweite Zahl selbst oder die positive Zahl addirt.

Lesen wir den ersten dieser beiden Sätze umgekehrt, nämlich $a-b = a+(-b)$, so sagt er aus: das Aneinanderreihen von Zahlen mit dem Zeichen $(-)$ bedeutet die Addition, oder allgemein, weil eine wirkliche Addition dabei doch nicht Statt findet, die Summation der entsprechenden negativen Zahlen.

§. 15.

Dem eben Gesagten zufolge ist $a-b-c+d = a+(-b)+(-c)+d$, d. h. die Aggregate sind Summen aus theils positiven, theils negativen Zahlen. Ziehen wir vorerst nur solche derartige Summen in Betracht, welche aus zwei Summanden bestehen, so sind folgende vier Fälle möglich:

1) Beide Summanden sind positiv,
2) der größere positiv, der kleinere negativ,
3) der zweite Fall umgekehrt,
4) beide Summanden negativ.

Bezeichnen wir die beiden Summanden mit a und b, und zwar sei $a > b$, so haben wir:

1) $a + b = (a + b)$;

2) $a - b = a + (-b) = (a - b)$;

3) $-a + b = (0 - a) + b \overset{4}{=} 0 - (a - b) = -(a - b)$;

4) $-a - b = -a + (-b) = (0 - a) + (-b) \overset{4}{=} 0 - [a - (-b)]$
$= 0 - (a + b)$
$= -(a + b)$.

Aus 1) und 4) folgt: Wenn die Summanden beide positiv oder beide negativ sind, so werden die Zahlen selbst addirt, und die Summe ist positiv oder negativ, je nachdem die beiden Summanden positiv oder negativ sind.

Aus 2) und 3): Ist der eine Summand positiv, der andere negativ, so werden die Zahlen selbst von einander subtrahirt, natürlich von der größeren die kleinere, und die Differenz ist positiv oder negativ, je nachdem die größere Zahl positiv oder negativ ist.

Man gibt diese Regeln wohl auch kürzer so:

Wenn die Summanden gleiche Zeichen haben, so werden die Zahlen selbst addirt und die Summe erhält das gemeinschaftliche Zeichen; wenn aber die Summanden ungleiche Zeichen haben, wird von der größeren Zahl die kleinere subtrahirt und die Differenz erhält das Zeichen der größeren Zahl.

Um diese Regeln einzuüben, ist es gut, mehrfache Summationen von Aggregaten aus Zifferzahlen mit den Schülern vorzunehmen, wie z. B.

$$24 - 47 - 31 + 62 - 88 + 91 = 11.$$

$24 - 47 = -23$;	$-54 + 62 = +8$;	$-80 + 91 = 11.$
$-23 - 31 = -54$;	$8 - 88 = -80$;	

§. 16.

Das Aggregat ist nicht bloß nach §. 15. eine Summe, es läßt sich auch als reine Differenz darstellen.

Es ist nämlich:

$$a - b - c + d + e - f =$$
$$\overset{M}{=} [(a - \overset{Sb}{b}) - \overset{Z}{c}] + [(d + e) - f]$$
$$\overset{S}{=} [a - (\overset{Z}{b} + c)] + [(\overset{M}{d} + e) - \overset{Sb}{f}]$$

$$\overset{2}{=}\{[a-(b\overset{Sb}{+}c)]\overset{Z}{+}(d+e)\}-f$$

$$\overset{4}{=}\{\overset{Z}{a}-[(b\overset{M}{+}c)-(d\overset{Sb}{+}e)]\}-f$$

$$\overset{4'}{=}\{[a+(d\overset{M}{+}e)]-(b\overset{Sb}{+}c)\}-\overset{Z}{f}$$

$$\overset{3}{=}[a+(d+e)]-[(b+c)+f]$$

$$=(a+d+e)-(b+c+f)$$

Mithin ist: $a-b-c+d+e-f=(a+d+e)-(b+c+f)$, d. h. jedes Aggregat ist gleich einer Differenz, deren Minuend die Summe aller positiven, und deren Subtrahend die Summe aller negativen Zahlen oder Glieder des Aggregates ist.

Hiernach ist:

$$24-47-31+62-88+91=$$

$$=(24+62+91)-(47+31+88)=$$

$$=177-166=11$$ wie oben.

§. 17.

Nachdem wir nun die Bedeutung des Aggregates in jeder Beziehung kennen gelernt, nämlich gezeigt haben, daß dasselbe die Stelle der Summe und die der Differenz zugleich vertritt und so das allgemeine und zugleich höchste Resultat der beiden bisher behandelten Rechnungsarten ist, entsteht eben damit die neue Aufgabe, zu zeigen, wie Aggregate 1) zu andern Ausdrücken addirt, 2) von solchen subtrahirt werden.

1) $a+(b-c+d+e-f+g)$

$$\overset{Z}{=}a+\{[(b\overset{Sd}{-}c)-d]+[(e\overset{Sd}{-}f)+g]\}\ *)$$

$$\overset{1}{**)}=\{\overset{Z}{a}+[(b\overset{M}{-}c)-\overset{Sb}{d}]\}+[(e-f)+g]$$

$$\overset{2}{=}\{[a\overset{Z}{+}(b\overset{M}{-}\overset{Sb}{c})]-d\}+[(e-f)+g]$$

$$\overset{2}{=}\{[(a\overset{Z}{+}b)-c]-d\}+[(e\overset{Sd}{-}f)\overset{Sd}{+}g]$$

*) Das gegebene Aggregat $b-c-d+e-f+g$ muß, wenn wir nach unsern Gesetzen damit rechnen wollen, zuerst in einen zweitheiligen Ausdruck verwandelt werden, indem wir die Klammern einsetzen, die wir nach §. 12. einsetzen können.

**) Die Aufgabe ist, zur Zahl a, welche auch einen ganzen Ausdruck vorstellen kann, das Aggregat zu addiren; mithin müssen alle Glieder desselben mit a in Verbindung gebracht werden.

$$\overset{1}{=}\Big(\big\{[(a+b)\overset{Z}{-}c]-d\big\}+(\overset{M}{e}-\overset{Sb}{f})\Big)+g$$
$$\overset{2}{=}\Big[\Big(\big\{[(a+b)-c]-d\big\}+e\Big)-f\Big]+g$$
$$*)=a+b-c-d+e-f+g$$

d. h. ein Aggregat wird zu einem Ausdrucke addirt, indem man die daſſelbe einſchließende Klammer hinwegläßt.

2) $a-(b-c-d+e-f+g)$

$$=\overset{Z}{a}-\big\{[(b-\overset{Sd}{c})-d]+[(e-\overset{Sd}{f})+g]\big\}$$
$$\overset{S}{=}\big\{\overset{Z}{a}-[(b-\overset{M}{c})-\overset{Sd}{d}]\big\}-[(e-f)+g]$$
$$\overset{4}{=}\big\{[\overset{Z}{a}-(\overset{M}{b}-\overset{Sb}{c})]+d\big\}-[(e-f)+g]$$
$$\overset{4}{=}\big\{[(a-b)+\overset{Z}{c}]+d\big\}-[(e\overset{Sd}{-}f)+\overset{Sd}{g}]$$
$$\overset{S}{=}\Big(\big\{[(a-b)+\overset{Z}{c}]+d\big\}-(\overset{M}{e}-\overset{Sb}{f})\Big)-g$$
$$\overset{4}{=}\Big[\Big(\big\{[(a-b)+c]+d\big\}-e\Big)+f\Big]-g$$
$$=a-b+c+d-e+f-g.$$

Es iſt alſo:

$$a-(b-c-d+e-f+g)=a-b+c+d-e+f-g$$

d. h. von einem Ausdrucke wird ein Aggregat ſubtrahirt, indem man unter Hinweglaſſung der daſſelbe einſchließenden Klammer die Zeichen aller Glieder in die entgegengeſetzten verwandelt.

Zweiter Abſchnitt.

Multiplikation und Diviſion.

§. 18.

Wir haben in den Aggregaten Summen aus einer unbeſchränkten Anzahl von Summanden kennen gelernt. Dieſe Summanden können als beliebige Zahlen wie bisher ungleiche, oder auch gleiche ſein. Sind ſie ungleiche, ſo läßt ſich mit einem ſolchen Aggregate nichts weiter anfangen; ſind ſie aber gleiche, ſo iſt uns offenbar die ganze Summe bekannt, wenn wir nur den gleichen Summand kennen und wiſſen, wie oft er in der Summe vorkommt.

---

*) Da die Klammern alle vom Anfange her ſtehen, ſo können ſie nach §. 12. ſämmtlich weggelaſſen werden.

Stellen wir nun aus dem gleichen Summanden und aus der Zahl, welche angibt, wie oft derselbe in der Summe enthalten sei, die Summe selbst unmittelbar, d. h. ohne Addition her, so haben wir damit offenbar eine neue Verbindung von Zahlen, also eine neue Rechnungsart. Wir nennen sie Multiplikation. Das Zeichen derselben besteht darin, daß man zwischen den gleichen Summand und die Zahl, welche angibt, wie oft er in der Summe vorkommt, das Zeichen ($\times$) setzt, welches man mit „multiplizirt mit“ oder „mal“ liest.

Der Ausdruck der Multiplikation ist mithin:

$$a \times b = (a \times b),$$

wo der gleiche Summand a nun Multiplikand, die Zahl b, welche angibt, wie oft a in der Summe vorkommt, Multiplikator, und die Summe ($a \times b$) Produkt heißt.

In der Rechnung mit unbestimmten oder Buchstaben-Zahlen geschieht die Multiplikation, wie jede andere Rechnungsart bloß formell (es ist eben $a \times b$ nicht $= c$, sondern $= (a \times b)$), in der Rechnung mit Zifferzahlen aber nur durch das „Einmaleins“. Drücken wir den Vorgang des Multiplizirens materiell (sächlich) aus, so heißt es die Einheiten des Multiplikands so vielmal setzen, als der Multiplikator Einheiten hat, oder den Multiplikand durch den Multiplikator vervielfältigen, daher auch der Name „multipliziren“.

Stellen wir dieß in Wirklichkeit dar, so haben wir:

d. h. die nämliche Menge von Punkten (Einheiten) stellt in der einen Richtung genommen das Produkt (a × b), in der andern das Produkt (b × a) vor, mithin ist:

$$a \times b \overset{I}{=} b \times a \text{ *)}$$

d. h. Multiplikand und Multiplikator können miteinander verwechselt werden, ohne daß dadurch das Produkt geändert würde.

Da somit Multiplikand und Multiplikator im Grunde keine verschiedene Bedeutung haben, so ist es unnöthig, sie durch diese Namen von einander zu unterscheiden; wir heißen sie deßhalb mit einem gemeinschaftlichen Namen „Faktoren".

Hienach heißt multipliziren, die beiden Faktoren verbinden, um das Produkt zu erhalten.

§. 19.

Die Verwechslung von Multiplikand und Multiplikator hat uns sonach auf keine neue Verbindung geführt; wollen wir daher eine solche mit den bisherigen Zahlen einleiten, so müssen wir das Produkt mit dem einen oder andern, überhaupt also mit dem einen Faktor verbinden, um den andern zu erhalten. Das Zeichen dieser offenbar neuen Verbindung, der Division, besteht darin, daß man zwischen das Produkt und den gegebenen Faktor das Zeichen (:) setzt, welches man mit „dividirt durch" liest.

Der Ausdruck der Division ist daher:

$$a : b = (a : b),$$

in welchem Ausdrucke das Produkt a jetzt Dividend, der gegebene Faktor b Divisor, und der gesuchte Faktor (a : b) Quotient heißt.

Aus der Ableitung der Division geht für sie materiell die Bedeutung hervor, daß durch sie aus dem Vielfachen (der Summe aus gleichen Summanden) das Einfache (der gleiche Summand) wieder hergestellt werde, indem die Division auf die Frage „welcher Summand ist so vielmal, als der gegebene Faktor es besagt, in der (vielfachen) Summe enthalten?" unmittelbar Antwort gibt. Mittelbar könnte, weil der Multiplikand und der Multiplikator mit einander verwechselt werden dürfen, die Rechnung durch fort-

*) Wir bezeichnen die Grundsätze und Gesetze dieser beiden Rechnungsarten wieder mit den nämlichen Nummern, wie die entsprechenden Grundsätze und Gesetze der beiden vorhergehenden Rechnungsarten.

gesetzte Subtraktion geführt werden, indem obige Frage in die umgekehrt würde: „wie oft kann der gegebene Faktor, nun als Summand genommen, von der (vielfachen) Summe hinweggenommen werden?“ z. B. $30 : 5 = 6$, sagt die Division unmittelbar, weil man auswendig weiß, daß der Summand 6 es ist, welcher, 5 mal gesetzt, die Summe 30 gibt. Auf dasselbe Resultat käme man aber auch durch fortgesetzte Subtraktion:

$30 - 5 = 25$; $25 - 5 = 20$; $20 - 5 = 15$; $15 - 5 = 10$; $10 - 5 = 5$; $5 - 5 = 0$. Also 6 mal konnte 5 von 30 hinweggenommen werden, 6 mal war oder eigentlich ist es also auch darin enthalten.

Aus dieser Bedeutung der Division geht zugleich hervor, daß es keinen Sinn gäbe, wollte man durch diese Rechnungsart den Faktor mit dem Produkte verbinden, um den andern Faktor zu erhalten, weil eben nicht gesagt werden kann: „wie oft ist die Summe im Summanden enthalten?“ sondern nur umgekehrt. Es ist also

$$a : b \text{ nicht} = b : a;$$

d. h. Dividend und Divisor können keineswegs mit einander verwechselt werden.

§. 20.

Die gegenseitige Beziehung, welche zwischen den beiden zweiten Rechnungsarten gemäß dem Gesagten besteht, muß nun auch bestimmt ausgesprochen werden; dieß geschieht,

a) indem wir auf den Ausdruck der Multiplikation die Definition der Division;

b) auf den Ausdruck der Letztern die Definition der Ersteren anwenden.

Dieß gibt a) $(a \overset{P}{\times} b) : b \overset{F}{\underset{II}{=}} a$,

b) $(a : b) \overset{F}{\times} b \overset{P}{\underset{III}{=}} a$.

Liest man den Grundsatz II mit den Benennungen der Multiplikation, den Grundsatz III mit denen der Division, so lauten die beiden Sätze mit Worten:

II. Wenn man ein Produkt durch einen seiner Faktoren dividirt, so erhält man den andern.

III. Wenn man einen Quotienten mit seinem Divisor multiplizirt, so erhält man den Dividend.

§. 21.

Wenn wir zwei Produkte (a × b) und (c × d), oder zwei Quotienten (a : b) und (c : d) mit einander vergleichen, so sind drei Fälle möglich: es können nämlich

1) beide Zahlen des einen Ausdruckes gleich sein beiden Zahlen des andern,
2) je eine Zahl in beiden Ausdrücken gleich, die andere ungleich,
3) beide Zahlen des einen Ausdruckes ungleich denen des andern.

ad 1) Es sei $\begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$

so ist sowohl $a \times b \overset{IV}{=} c \times d$,

als auch $a : b \overset{IV}{=} c : d$,

beides gemäß den Grundbegriffen von Multipliziren und Dividiren.

Beide Sätze vereinigen wir als vierten Grundsatz mit den Worten: Gleiches mit Gleichem multiplizirt, oder Gleiches durch Gleiches dividirt gibt Gleiches.

ad 2) Es sei 1) $\begin{cases} a = c \\ b > d \end{cases}$ oder 2) $\begin{cases} a > c \\ b = d \end{cases}$

so ist sowohl 1) $a \times b > c \times d$, als auch 2) $a \times b > c \times d$,

hingegen 1) $a : b < c : d$, während 2) $a : b > c : d$,

Sätze, welche sich aus den Grundbegriffen beider Rechnungsarten leicht herleiten lassen. Fassen wir sie in Worte, so haben wir für die Produkte in beiden Fällen:

„Wenn man Gleiches mit Ungleichem, oder umgekehrt, multiplizirt, so erhält man Ungleiches, und zwar ist dasjenige Produkt das größere, welches den größeren Faktor enthält."

Für die beiden Quotienten gilt

im ersten Falle:

„Wenn man Gleiches durch Ungleiches dividirt, so erhält man Ungleiches und zwar den kleineren Quotienten auf der Seite, welche den größeren Divisor hat."

Im zweiten Falle:

„Wenn man Ungleiches durch Gleiches dividirt, so erhält man Ungleiches, und zwar den größeren Quotienten auf der Seite, die den größern Dividend enthält."

ad 3) Sind beide Zahlen des einen Ausdruckes beiden des andern ungleich, so ist das Verhältniß der beiden Produkte, wie das der beiden Quotienten ein gänzlich unbestimmtes. Eben in

dieſer Unbeſtimmtheit liegt aber auch die Möglichkeit, daß die beiden Produkte oder die beiden Quotienten einander gleich ſeien, daß alſo

$$a \times b = c \times d$$

oder $a : b = c : d$; ſolche Gleichungen heißen dann ebenfalls, wie die in §. 6., Proportionen.

Anmerkung. Sowohl dieſe Proportionen als auch die unbeſtimmten Gleichungen zwiſchen Produkten und Quotienten u. ſ. w. überhaupt werden im zweiten Buche weitläufiger behandelt werden.

§. 22.

Auf die Verbindung der Produkte und Quotienten überzugehen, finden ſich hiebei, wie bei der analogen Verbindung der Summen und Differenzen im §. 7., wieder vier mögliche Aufgaben vor:

1) eine Zahl mit einem Produkte zu multipliziren,
2) = = = Quotienten = =
3) = = durch ein Produkt = dividiren,
4) = = = einen Quotienten = = .

Erſte Aufgabe.

Die Aufgabe $a \times (b \times c)$ beſagt, das Produkt $(b \times c)$ ſoll a mal geſetzt werden; machen wir dieſe Setzung wirklich, indem wir das Produkt $(b \times c)$ erſt einmal, natürlich als Summe, und ſo fort a mal ſetzen, ſo haben wir:

$$b + b + b + b + \cdots\cdots \text{ c mal} = (b \times c)$$
$$b + b + b + b + \cdots\cdots \text{ c mal} = (b \times c)$$
$$b + b + b + b + \cdots\cdots \text{ c mal} = (b \times c)$$
$$b + b + b + b + \cdots\cdots \text{ c mal} = (b \times c)$$
$$b + b + b + b + \cdots\cdots \text{ c mal} = (b \times c)$$
$$b + b + b + b + \cdots\cdots \text{ c mal} = (b \times c)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a \text{ mal} = (a \times b) \quad a \text{ mal} = (a \times b) \quad a \text{ mal} = (a \times b) \quad a \text{ mal} = (a \times b) \cdots\cdots \text{ c mal} = a \text{ mal} = (a \times b) \times c$$

Dieselbe Menge von b, welche in der einen Richtung gelesen $= a \times (b \times c)$, ist in der andern Richtung gelesen $= (a \times b) \times c$. Mithin ist

$$a \times (b \times c) \overset{1}{=} (a \times b) \times c$$

d. i. eine Zahl wird mit einem Produkte multiplizirt, indem man die Zahl mit dem einen Faktor, und das erhaltene Produkt mit dem andern multiplizirt.

Zweite Aufgabe.

Wie die Aufgabe in $a \times (b : c)$ vorliegt, so liegt es zunächst, a mit b zu multipliziren, womit man das Produkt $(a \times b)$ erhält. Nun ist aber die Aufgabe, die Zahl a mit dem Faktor $(b : c)$ zu multipliziren, nicht aber mit dem Produkte b. Indem wir aber a mit b multiplizirten, haben wir nach dem ersten Gesetze die Zahl a mit beiden Faktoren dieses Produktes, sowohl mit $(b : c)$, was allein hätte geschehen sollen, als auch mit c multiplizirt. Mithin ist in dem bisherigen Produkte $(a \times b)$ auch dieser letztere Faktor c, welcher nicht darin sein sollte; er muß daher wieder daraus entfernt werden, was nach dem Grundsatze II dadurch geschieht, daß man dasselbe durch c dividirt. Demgemäß ist:

$$a \times (b : c) \overset{2}{=} (a \times b) : c$$

Mit Worten: Eine Zahl wird mit einem Quotienten multiplizirt, indem man die Zahl mit dem Dividende multiplizirt, und das erhaltene Produkt durch den Divisor dividirt.

Dritte Aufgabe.

Die Aufgabe $a : (b \times c)$ setzt voraus, daß a ein Produkt sei, dessen einer Faktor das Produkt $(b \times c)$ ist, welcher Faktor der Aufgabe zufolge aus dem Produkte entfernt werden soll. Dividiren wir nun a durch b, was, wie die Aufgabe steht, zunächst liegt, so ist in $(a : b)$ zwar der Faktor b, nicht aber auch der andere Faktor c und damit der Gesammt-Faktor oder das Produkt $(b \times c)$ entfernt. Damit nun auch dieß geschehe, muß gemäß Grundsatz II der Quotient $(a : b)$ noch durch c dividirt werden. Demgemäß ist:

$$a : (b \times c) \overset{3}{=} (a : b) : c$$

Mit Worten: Eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, indem man die Zahl durch den einen Faktor, und den erhaltenen Quotienten durch den andern dividirt.

Vierte Aufgabe.

In der Aufgabe a : (b : c) liegt es zunächst, a durch b zu dividiren, womit wir (a : b) erhalten. Damit aber haben wir das Produkt b aus dem Produkte a hinweggeschafft, mithin nach dem dritten Gesetze nicht bloß den Faktor (b : c), der allein hätte entfernt werden sollen, sondern auch den Faktor c; diesen zu viel entfernten Faktor c müssen wir also wieder als Faktor in's Gesammt-Produkt bringen, was nach dem Grundsatze III dadurch geschieht, daß man das bisherige Resultat (a : b) wieder mit c multiplizirt. Dem gemäß ist

$$a : (b : c) \overset{4}{=} (a : b) \times c$$

Mit Worten: Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man die Zahl durch den Dividend dividirt, und den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor multiplizirt.

§. 23.

Umgekehrt sind die Produkte und Quotienten auch mit den Zahlen sowohl durch Multiplikation als durch Division zu verbinden. Dieß führt wieder auf die folgenden vier Aufgaben:

1) ein Produkt zu multipliziren mit einer Zahl,
2) " " dividiren durch eine Zahl,
3) einen Quotienten zu dividiren durch eine Zahl,
4) " " multipliziren mit einer Zahl.

Diese vier möglichen Aufgaben finden sich bereits gelöst, wenn wir in unsern vorhergehenden vier Gesetzen die Auflösungen, nämlich die zweiten Seiten der Gleichungen, als die Aufgaben, und umgekehrt die ersten Seiten als deren Auflösungen betrachten. Dann ist:

$$1)\ (a \times b) \times c \overset{1}{=} a \times (b \times c),$$

$$2)\ (a \times b) : c \overset{2}{=} a \times (b : c),$$

$$3)\ (a : b) : c \overset{3}{=} a : (b \times c),$$

$$4)\ (a : b) \times c \overset{4}{=} a : (b : c).$$

d. h. 1) ein Produkt wird mit einer Zahl multiplizirt, indem man den einen Faktor multiplizirt mit dem Produkte aus dem andern Faktor und der Zahl.

2) Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, indem man

den einen Faktor multiplizirt mit dem Quotienten aus dem andern Faktor und der Zahl.

3) Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Dividend dividirt durch das Produkt aus dem Divisor und der Zahl.

4) Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplizirt, indem man den Dividend dividirt durch den Quotienten aus dem Divisor und der Zahl.

Anmerkung 1. Die Aufgabe, die durch das vierte direkte Gesetz gelöst ist, kann auch auf folgende Art anders gelöst werden:

$$a : (b : c) \overset{4}{=} (a : b) \times c$$
$$\overset{1}{=} c \times (a : b)$$
$$\overset{2}{=} (c \times a) : b$$
$$\overset{1}{=} (a \times c) : b$$

Der in der Gleichung: $a : (b : c) \overset{4'}{=} (a \times c) : b$ enthaltene Satz geht unter dem Namen des vierten Nebengesetzes, und heißt mit Worten:

Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man die Zahl mit dem Divisor multiplizirt, und dieses Produkt durch den Dividend dividirt.

Anmerkung 2. Die Beweise für das zweite, dritte und vierte Hauptgesetz des Multiplizirens und Dividirens und der des vierten Nebengesetzes werden ganz analog denen der entsprechenden Gesetze des Addirens und Subtrahirens (s. §. 9) geführt, weßwegen wir die wirkliche Ausführung derselben hier wohl hinweglassen können. Ebenso halte ich es für überflüssig, zur Uebung in den Gesetzen der Multiplikation und Division hier Beispiele der Vereinfachung von Ausdrücken einzuschalten, wie für die Addition und Subtraktion im §. 11. geschehen ist, weil zwischen den erstern Beispielen und diesen letzteren der ganze Unterschied darin bestände, daß, wo die letzteren das Zeichen (+), jene das Zeichen (×), und wo diese (—), jene (:) hätten.

§. 24.

Führen wir die Untersuchung, ob die in den Gesetzen der Multiplikation und Division angewendeten Klammern nothwendig

seien, wenn die Gleichungen selbst wahr sein sollen, in ähnlicher Weise, wie wir sie in §. 12. für die Addition und Subtraktion geführt haben, so ist deren Ergebniß folgendes:

1) Produkte und Quotienten, welche am Anfange oder nach einem Multiplikationszeichen stehen, können beliebig in eine Klammer gefaßt sein oder nicht;
2) solche Produkte und Quotienten aber, welche nach einem Divisionszeichen stehen, müssen in einer Klammer eingeschlossen sein.

Bisher haben wir schon um der Uebereinstimmung mit den Additions- und Subtraktions-Gesetzen willen, besonders aber zur besseren Unterscheidung der einzelnen Theile der Rechnung die gleichsam strikteren Bezeichnungen der Multiplikation und Division allein angewendet. Es gibt aber deren noch andere einfachere: man bezeichnet nämlich die Multiplikation bei bloßen Zahlen einfach dadurch, daß man diese neben einander schreibt, bei weniger zusammengesetzten Ausdrücken dadurch, daß man zwischen solche Faktoren einen bloßen Punkt (.) setzt, und nur bei größeren Ausdrücken behält man das Zeichen (×) bei; — die Division aber wird, so oft nur ein einziges Divisionszeichen vorkommt, dadurch angezeigt, daß man unter dem Dividend einen horizontalen Strich zieht und unter diesen den Divisor setzt; sind aber zwei Divisionen in einem Ausdrucke anzuzeigen, so wird für die einfachere Division das letztere, für die zusammengesetztere das bisherige Zeichen der Division gewählt. Den Gebrauch dieser Zeichen wird man noch deutlicher aus den folgenden vier Gleichungen ersehen, welche nichts Anderes sind, als unsere vier Gesetze der Multiplikation und Division, aber mit dieser neuen Bezeichnung ausgedrückt. Zugleich wird man erkennen, daß mit dieser Bezeichnung alle, Produkte oder Quotienten einschließende Klammern überflüssig sind.

$$a \,.\, bc \overset{1}{=} ab \,.\, c \text{ oder wohl gar } abc = abc;$$

$$a \,.\, \frac{b}{c} \overset{2}{=} \frac{ab}{c};$$

$$\frac{a}{bc} \overset{3}{=} \frac{a}{b} : c;$$

$$a : \frac{b}{c} \overset{4}{=} \frac{a}{b} \,.\, c \overset{4'}{=} \frac{ac}{b}.$$

§. 25.

Die hier für die Bezeichnung der Multiplikation und Division gegebenen Regeln gelten zunächst nur für die Rechnung mit Buchstabenzahlen. Bei der mit Zifferzahlen ist natürlich das bloße Nebeneinanderschreiben der Faktoren nicht statthaft, weil damit durch das jeweilige Zifferzahlen-System bereits ein anderer bestimmter Sinn verbunden ist; es müssen sonach solche Faktoren durch die Zeichen (.) oder (×) geschieden sein. Endlich sind noch die aus Ziffern und Buchstabenzahlen gemischten Produkte, wie $a \times 5 = 5 \times a$ zu beachten. Solche werden gewöhnlich so angeschrieben, daß der Zifferfaktor dem Buchstabenfaktor und zwar ohne weiteres Multiplikationszeichen vorgesetzt wird, so daß $a \times 5 = 5a$. So ein Zifferfaktor wird wohl auch Coëfficient genannt. Stellen wir solche Produkte als Summen dar, so ist:

$$5a = a + a + a + a + a,$$
$$3a = a + a + a,$$
$$2a = a + a,$$
$$\underline{1a = a.}$$

Lesen wir diese letztere Gleichung mit Worten, so sagt sie uns einerseits, daß der Faktor 1 nicht angeschrieben zu werden braucht, weßwegen dieß auch gewöhnlich nicht geschieht, andrerseits, daß jede bloße Zahl auch als Produkt mit dem Faktor 1 betrachtet werden könne.

Aus derselben Gleichung ziehen wir gemäß dem zweiten Grundsatze die weiteren Folgerungen:

1) $\frac{a}{1} = a$ d. h. der Divisor 1 braucht nicht angeschrieben zu werden, weßwegen es auch gewöhnlich nicht geschieht; umgekehrt aber: jede bloße Zahl kann auch als Quotient mit dem Divisor 1 betrachtet werden.

2) $\frac{a}{a} = 1$, d. h. jeder Quotient, dessen Dividend gleich dem Divisor, ist gleich der Einheit.

§. 26.

Dieß führt uns von selbst auch noch auf diejenigen Quotienten, deren Dividend kleiner als der Divisor ist. Die allgemeine

Form eines solchen Quotienten ist $\frac{a}{ab} \overset{3}{=} \frac{a}{a} : b = 1 : b = \frac{1}{b}$, und es kann sonach jeder derartige Quotient in einen solchen mit dem Dividend 1 verwandelt werden. Der Ausdruck $\frac{1}{b}$ stellt aber denjenigen Summand vor, welcher b mal in der Summe 1 enthalten ist; denn $\frac{1}{b} \cdot b \overset{\text{III}}{=} 1$. Nun hat freilich eine Summe, welche $= 1$ ist, nach unsern bisherigen Begriffen von Zahl und Summe, gemäß welchen schon jede Zahl, um so mehr also die Summe eine gewisse Menge von Einheiten enthält, strenge genommen keinen Sinn. Allein eben durch den in der Rechnung mit unbestimmten Zahlen unvermeidlichen Ausdruck $\frac{1}{b}$ finden wir uns genöthigt, neben der absoluten Einheit, die wir bisher allein festgehalten, auch noch relative von der Form $\frac{1}{b}$ anzunehmen, von denen b zusammen erst die absolute Einheit ausmachen. Natürlich führen diese relativen Einheiten, indem wir gewisse Mengen derselben annehmen, auch auf relative Zahlen von der Form $\frac{a}{b}$ $\left(\text{gemäß } a \cdot \frac{1}{b} \overset{\text{II}}{=} \frac{a \cdot 1}{b} = \frac{a}{b}\right)$.

Diese relativen Zahlen werden, weil die ihnen zu Grunde liegenden Einheiten selbst Theile (Bruchtheile) der absoluten Einheit sind, Brüche genannt, und zwar allgemein, ob $a >$ oder $=$ oder $< b$ ist, nur daß diejenigen Brüche, bei welchen das Letztere der Fall ist, speziell als eigentliche oder ächte unterschieden werden. Damit aber fallen unsere Brüche wieder ganz mit den allgemeinen Quotienten von der Form $\frac{a}{b}$ zusammen, bei welchen es ebenfalls unbestimmt gelassen ist, ob $a >$ oder $=$ oder $< b$ ist, so daß derselbe Ausdruck $\frac{a}{b}$ bald Quotient bald Bruch genannt wird, je nachdem man sich eine absolute oder eine relative Zahl darunter vorstellt. So ist z. B. $\frac{12}{4}$ ein Quotient, wenn ich mir dabei die absolute Zahl 3 denke, die daraus resultirt, aber ein Bruch, wenn ich mir darunter eine Menge von 12 Einheiten vorstelle, deren jede der vierte Theil der absoluten Einheit ist. Daß übrigens diese

so ganz willkührliche Vorstellung ohne alle Bedeutung für die Rechnung ist, versteht sich wohl von selbst, daher wir auch auf diesen Unterschied zwischen Quotient und Bruch in der Folge nicht weiter reflektiren, sondern beide Benennungen nach Willkühr gebrauchen werden.

§. 27.

Im §. 25. haben wir gesehen, daß jede Zahl beliebig als Produkt oder als Quotient betrachtet werden könne; damit aber geht in Absicht auf Multiplikation und Division die ganze Rechnung in ein Rechnen mit Produkten und Quotienten über, so daß unsere früheren acht Fälle der Multiplikation und Division von Zahlen mit Produkten und Quotienten sich auf folgende vier reduziren:

1) Zwei Produkte mit einander zu multipliziren,
2) = = durch = = dividiren,
3) = Quotienten mit = = multipliziren,
4) = = durch = = dividiren.

Erste Aufgabe.

$$ac \times bd = (a \times c) \times (b \times d)$$
$$\overset{1}{=} [(a \times c) \times b] \times d$$
$$\overset{1}{=} [(a \times b) \times c] \times d$$
$$= a \times b \times c \times d.$$

Mithin $ac \times bd = abcd$

d. h. zwei Produkte werden mit einander multiplizirt, indem man ihre Faktoren (gewöhnlich alphabetisch) an einander reiht (erste Hauptregel).

Anmerkung. Enthalten die Produkte Zifferfaktoren, die natürlich wirklich multiplizirt, d. h. in Eine Zahl vereinigt werden können, so werden selbe wirklich multiplizirt und ihr Produkt als Coëfficient der Reihe der übrigen Faktoren vorangesetzt. Z. B. $7a \times 5b = 7 . 5ab = 35ab$ (erste Nebenregel).

Zweite Aufgabe.

$$\frac{ab}{cd} = \frac{ab}{cd}$$

Diese Aufgabe läßt sich offenbar nicht einfacher darstellen, als sie schon gegeben ist; denn wollten wir sie auch, was wir könnten,

in das Produkt zweier Quotienten verwandeln $\left(\frac{ab}{cd} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d}\right)$, so wäre damit nichts gewonnen, indem dabei zwei Divisionszeichen vorkämen, während in der Aufgabe nur eines. Substituiren wir aber der allgemeinen Aufgabe die besondere, zwei Produkte durch einander zu dividiren, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so erhalten wir:

$$\frac{ab}{bd} = (a \times b) : (b \times d) \overset{3}{=} [(a \times b) : b] : d \overset{II}{=} a : d.$$

$$\text{Mithin } \frac{ab}{bd} = \frac{a}{d}$$

d. h. zwei Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, werden durch einander dividirt, indem man mit Hinweglassung der gemeinschaftlichen Faktoren die nicht gemeinschaftlichen durch einander dividirt (zweite Hauptregel).

Anmerkung. Betrachtet man die beiden Seiten der Gleichung bloß als Quotienten oder Brüche, so sagt die Gleichung, direkt und indirekt gelesen, Folgendes:

Ein Quotient (Bruch) bleibt sich gleich, wenn man Dividend und Divisor (Zähler und Nenner) durch dieselbe Zahl dividirt, [was man den Quotienten verkleinern heißt] oder mit derselben Zahl multiplizirt [was man eben so vergrößern heißen kann], — welche zweite Nebenregel in der Umformung der Brüche, wie wir weiter unten sehen werden, eine wichtige Anwendung findet.

Dritte Aufgabe.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a : b) \times (c : d) \overset{2}{=} [(a : b) \times c] : d \overset{2}{=} [(a \times c) : b] : d$$

$$\overset{3}{=} (a \times c) : (b \times d).$$

$$\text{Mithin } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

d. h. zwei Quotienten werden mit einander multiplizirt, indem man das Produkt aus den beiden Dividenden durch das Produkt aus den beiden Divisoren dividirt (dritte Hauptregel).

Sind die Theile der Quotienten selbst Produkte, so sind oft Vereinfachungen möglich, nämlich wenn je ein Dividend und ein Divisor einen gemeinschaftlichen Faktor haben, wie z. B. in

$\frac{ab}{cd} \cdot \frac{ce}{bf} = \frac{abce}{bcdf} = \frac{ae}{df}$, welches Resultat man auch unmittelbar erhält, wenn man schon in der Aufgabe die gleichen Faktoren b und c in den betreffenden Produkten wegläßt. Daraus geht die **dritte Nebenregel** hervor:

Bei der Multiplikation von Quotienten lasse man je in einem Dividend und einem Divisor die gemeinschaftlichen Faktoren, welche sie etwa haben, hinweg (verkleinere je einen Dividend und einen Divisor); die übrig bleibenden Faktoren aber multiplizire man nach der dritten Hauptregel.

Beispiel.

$$\left(\frac{\overset{9}{\cancel{54}}bc}{11ad} \cdot \frac{45z}{\underset{16}{\cancel{96}}xy}\right) \times \left(\frac{\overset{11}{\cancel{33}}ax}{81bz} \cdot \frac{32dy}{\underset{3}{\cancel{9}}c}\right) = \frac{\overset{5}{\cancel{40}}bcz}{17\cancel{6}adxy} \times \frac{\overset{2}{\cancel{35}}2adxy}{24\underset{3}{\cancel{3}}bcz} =$$

$$= \frac{10}{3}, \text{ u. dgl.}$$

Vierte Aufgabe.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = (a : b) : (c : d) \overset{4'}{=} [(a : b) \times d] : c$$

$$\overset{2}{=} [(a \times d) : b] : c \overset{3}{=} (a \times d) : (b \times c);$$

$$\text{mithin } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

oder **vierte Hauptregel**: Ein Quotient wird durch einen zweiten dividirt, indem man das Produkt aus dem ersten Dividend und zweiten Divisor dividirt durch das Produkt aus dem ersten Divisor und zweiten Dividend.

Anmerkung. Sind die Theile der Quotienten selbst wieder Produkte, so sind wie bei der dritten Aufgabe Vereinfachungen möglich, aber dießmal dann, wenn die beiden Dividende oder die beiden Divisoren gemeinschaftliche Faktoren enthalten. So ist z. B.

$\frac{ab}{cd} : \frac{be}{cf} = \frac{abcf}{bcde} = \frac{af}{de}$, welches Resultat man auch unmittelbar erhält, wenn man schon in der Aufgabe die gleichen Faktoren aus den betreffenden Produkten hinwegläßt. Daraus geht als **vierte Nebenregel** hervor:

Bei der Division von Quotienten lasse man, wenn die beiden Dividende oder die beiden Divisoren gemeinschaftliche Faktoren

haben, dieselben hinweg (verkleinere Dividend gegen Dividend, und Divisor gegen Divisor) und verfahre sodann mit den übrigen Faktoren nach der vierten Hauptregel.

Beispiele.

1) $\left(\frac{7ac}{5bd} : \frac{3cd}{8ab}\right) : \left(\frac{\overset{7}{\cancel{63}}ab}{cd} : \frac{\overset{5}{\cancel{45}}dd}{4ac}\right) = \frac{\overset{2}{\cancel{56}}aa}{\cancel{12}dd} : \frac{28aab}{\cancel{3}ddd} = \frac{2d}{3b}$.

2) $\left(5ac \times \frac{48bby}{\overset{7}{\cancel{35}}cdx}\right) : \left(\frac{\overset{12}{\cancel{60}}byy}{49axx} : 5de\right)^{3} = \frac{\overset{4}{\cancel{48}}abby}{7dx} : \frac{\cancel{12}byy}{\overset{7}{\cancel{49}}adexx} =$

$= \frac{28aabex}{y}$, u. dgl.

Dritter Abschnitt.

Die vier ersten Rechnungsarten zusammen.

§. 28.

Nachdem wir im vorhergehenden Paragraphe, der überhaupt das Wesentliche aus der ganzen Lehre von der Multiplikation und Division zusammenfaßt, gezeigt, wie diese beiden Rechnungsarten auf die Resultate derselben selbst, nämlich auf die Produkte und Quotienten angewendet werden, müssen wir nun auch zeigen:

1) wie die Multiplikation und Division auf Summen und Differenzen,
2) die Addition und Subtraktion auf Produkte und Quotienten ihre Anwendung finden, womit wir dann die möglichen Beziehungen zwischen den vier Rechnungsarten zusammen erst werden hergestellt haben.

Die erste dieser Fragen zerfällt in folgende vier:

1) wie wird eine Summe mit einer Zahl multiplizirt,
2) " " Differenz " " "
3) " Summe durch eine dividirt,
4) " Differenz " "

Die vier Sätze, durch welche wir im Folgenden diese Fragen beantworten werden, unterscheiden wir von den früheren durch den Namen der gemischten Gesetze.

Erste Aufgabe.

$$(a+b)\times c = (a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)+\ldots\ c\ \text{mal}$$
$$= a+a+a+a+\ldots\ c\ \text{mal}+b+b+b+b\ \ldots\ c\ \text{mal}$$
$$= (a\times c)+(b\times c).$$

Mithin $(a+b)\times c \overset{1g}{=} (a\times c)+(b\times c)$

d. h. eine Summe wird mit einer Zahl multiplizirt, indem man zum Produkte aus dem einen Summanden und der Zahl addirt das Produkt aus dem andern Summanden und der Zahl, oder: indem man die beiden Summanden mit der Zahl multiplizirt und die dadurch erhaltenen Produkte addirt.

Anmerkung. Es ist hier nicht überflüßig, die Schüler auf den Unterschied aufmerksam zu machen, der zwischen der Multiplikation eines Produktes oder einer Summe mit einer Zahl besteht, indem bei der ersteren nur Ein Faktor mit der Zahl multiplizirt werden darf, bei der letzteren beide Summanden damit multiplizirt werden müssen.

Zweite Aufgabe.

$$(a-b)\times c = (a-b)+(a-b)+(a-b)+(a-b)+\ldots\ c\ \text{mal}$$
$$= a-b+a-b+a-b+a-b\ \ldots\ c\ \text{mal} =$$
$$= (a+a+a+a+\ldots\ c\,\text{mal})-(b+b+b+b\ldots\ c\,\text{mal})$$
$$= (a\times c)-(b\times c)$$

Mithin $(a-b)\times c \overset{2g}{=} (a\times c)-(b\times c)$

d. h. eine Differenz wird mit einer Zahl multiplizirt, indem man vom Produkte aus dem Minuend und der Zahl subtrahirt das Produkt aus dem Subtrahend und der Zahl.

Dritte Aufgabe.

Die Aufgabe $(a+b):c$ setz voraus, daß die Summe $(a+b)$ zugleich ein Produkt sei, dessen einer Fktor c ist. Eine solche Summe aber, die zugleich Produkt ist, bietet uns bis jetzt nur die Gleichung des ersten gemischten Gesetzes in $(a\times c+(b\times c)$. In diesem Produkte, dessen einer Faktor, wie in unserer jetzigen Aufgabe, c ist, finden wir den andern Faktor, der, wie wir aus der Aufgabe $(a+b)\times c$ wissen, kein andrer als $(a+b)$ ist, offenbar dadurch, daß wir die beiden Summanden $(a\times c)$ und $(b\times c)$ der Summe, die zugleich Produkt ist, durch den bekannten Faktor c dividiren, und die dadurch erhaltenen Quotienten $[(a\times c):c = a$

und $(b \times c) : c = b]$ addiren. Verfahren wir nun in der uns jetzt vorliegenden Aufgabe eben so, so ist

$$(a + b) : c \overset{3g}{=} (a : c) + (b : c)$$

d. h. eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, indem man beide Summanden durch die Zahl dividirt und die dadurch erhaltenen Quotienten addirt.

Anmerkung. Hier dürfte hinsichtlich der Division eines Produktes und einer Summe durch eine Zahl dieselbe Bemerkung wiederholt werden, die wir oben bei der ersten Aufgabe hinsichtlich der Multiplikation derselben Größen gemacht haben.

Vierte Aufgabe.

Die Aufgabe $(a - b) : c$ setzt wieder voraus, daß die Differenz $(a - b)$ ein Produkt sei, dessen einer Faktor c ist. So eine Differenz aber, die zugleich Produkt ist, ist uns bis jetzt nur einmal vorgekommen, nämlich die Differenz $(a \times c) - (b \times c)$ in der Gleichung des zweiten gemischten Gesetzes. Eine ganz ähnliche Schlußfolgerung nun, wie wir sie in der vorausgehenden dritten Aufgabe durchgeführt haben, sagt uns, daß man bei diesem und ebenso bei jedem andern Produkte, das eine Differenz ist, den gesuchten Faktor finde, wenn man sowohl den Minuend als den Subtrahend durch den gegebenen Faktor dividirt und vom ersteren Quotienten den letzteren subtrahirt. Mithin ist

$$(a - b) : c \overset{4g}{=} (a : c) - (b : c)$$

d. h. eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, indem man vom Quotienten aus dem Minuend und der Zahl subtrahirt den Quotienten aus dem Subtrahend und der Zahl.

Anmerkung. Die Richtigkeit der Schlußfolgerungen, vermittelst deren wir unser drittes und viertes Gesetz aufgestellt haben, erhellt auch aus den folgenden Beweisen der betreffenden Gleichungen.

Beweis des 3g:

$$\underline{(a + b) : c = (a : c) + (b : c).}$$

1) $[(a + b) : c] \times c = \underline{a + b};$

2) $[(a : c) \overset{sd}{+} (b : c) \overset{sd}{]} \overset{z}{\times} c \overset{1g}{=} [(a : c) \times c] + [(b : c) \times c]$
$= \underline{a + b.}$

Beweis des 4g:

$$\underline{(a - b) : c = (a : c) - (b : c).}$$

1) $[(a - b) : c) \times c] = a - b$;

2) $[(a : c) - (b : c)] \times c \overset{2g}{=} [(a : c) \times c] - [(b : c) \times c]$
$= a - b.$

§. 29.

Die zweite Frage, die Anwendung der Addition und Subtraktion auf Produkte und Quotienten betreffend, läßt, wenn wir bedenken, daß Produkten und Quotienten gegenüber von selbstständigen Zahlen nicht mehr die Rede ist, nur folgende vier mögliche Aufgaben zu, nämlich:

1) zwei Produkte zu addiren,
2) " " " subtrahiren,
3) " Quotienten zu addiren,
4) " " " subtrahiren.

Diese vier Aufgaben finden sich, wenn auch in beschränkterer Weise, als sie hier oben gegeben sind, bereits in den Gleichungen unserer vier gemischten Gesetze gelöst, wenn wir dieselben umkehren. Es ist nämlich:

1) $(a \times c) + (b \times c) \overset{1g}{=} (a + b) \times c$;

2) $(a \times c) - (b \times c) \overset{2g}{=} (a - b) \times c$;

3) $(a : c) + (b : c) \overset{3g}{=} (a + b) : c$;

4) $(a : c) - (b : c) \overset{4g}{=} (a - b) : c$;

d. i. 1) zwei Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, werden addirt, indem man die nicht gemeinschaftlichen Faktoren addirt und deren Summe mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizirt.

2) Zwei Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, werden subtrahirt, indem man ihre nicht gemeinschaftlichen Faktoren in derselben Ordnung subtrahirt, und die erhaltene Differenz mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizirt.

3) Zwei Quotienten, die einen gemeinschaftlichen Divisor haben, werden addirt, indem man ihre Dividende addirt und die erhaltene Summe durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

4) Zwei Quotienten, die einen gemeinschaftlichen Divisor haben, werden subtrahirt, indem man ihre Dividende in derselben Ordnung subtrahirt und die erhaltene Differenz durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

Gemäß dem ersten und zweiten dieser Gesetze werden nur solche Produkte addirt und subtrahirt, welche einen gemeinschaftlichen Faktor haben; die Aufgabe ist aber allgemein, Produkte überhaupt zu addiren und zu subtrahiren. Gehen wir daran, diese allgemeine Aufgabe, wie sie durch $(a \times b) + (c \times d)$ oder $(a \times b) - (c \times d)$ formulirt ist, auf die allein denkbare Art, nämlich dadurch zu lösen, daß wir die Produkte auf Summen zurückführen, so haben wir:

$(a \times b) + (c \times d) = a + a + a \ldots$. b mal $+ c + c + c + c + \ldots$. d mal.

An dieser Summe nun läßt sich durchaus nichts vereinfachen, nur abkürzen läßt sie sich dadurch, daß man die einzelnen Summen aus gleichen Summanden wieder in die Form von Produkten bringt, so daß wir erhalten:

$$(a \times b) + (c \times d) = (a \times b) + (c \times d),$$

was offenbar keine Auflösung unserer Aufgabe ist.

Ebenso würden wir erhalten:

$$(a \times b) - (c \times d) = (a \times b) - (c \times d),$$

woraus denn hervorgeht, daß Produkte, die keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, durchaus weder addirt noch subtrahirt werden können.

Anmerkung. Aus dem hier über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Addition und Subtraktion von Produkten Gesagten wird erhellen, was davon zu halten sei, wenn man in Lehrbüchern der Algebra liest, $5a + 7a$ z. B. können addirt werden, weil sie gleichnamige Zahlen seien! —

Noch weniger als Produkte, die keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, bei denen noch ein Mittel der Lösung, nämlich das Zurückgehen auf die Summen denkbar, wenn auch zu keinem Ziele führend, ist, könnten Quotienten addirt oder subtrahirt werden, die keinen gemeinschaftlichen Divisor haben — wenn uns nicht die zweite Nebenregel des §. 27. im Verkleinern oder Vergrößern des Dividends und des Divisors einen Ausweg böte, die ungleichen Divisoren zweier Quotienten gleich und dadurch die Quotienten selbst summirbar zu machen. Wir werden hierauf weiter unten ausführlicher zurückkommen.

§. 30.

Eine nähere Untersuchung erfordert die Multiplikation und Division der falschen Differenzen, sowohl an und für sich, als auch weil nur dadurch die Multiplikation und Division mit dem Aggregate als dem allgemeinen Resultate der beiden ersten Rechnungsarten ermöglicht wird.

1. Multiplikation und Division mit 0.

$$a \times 0 = a \times (b - b) = (a \times b) - (a \times b) = 0$$

d. h. wenn ein Faktor eines Produktes $= 0$ ist, so ist das Produkt selbst $= 0$; umgekehrt, wenn ein Produkt $= 0$, muß einer seiner Faktoren $= 0$ sein.

Aus obiger Gleichung gehen nach dem Begriffe der Division die weiteren hervor:

1) $\frac{0}{a} = 0$, d. h. wenn der Dividend $= 0$ ist, so ist der Quotient selbst $= 0$.

2) $\frac{0}{0} = a$; ebenso, weil auch $b \times 0 = 0$ oder $c \times 0 = 0$, $\frac{0}{0} = b$ oder $\frac{0}{0} = c$ u. s. w.; d. h. der Ausdruck $\frac{0}{0}$ ist der gänzlicher Unbestimmtheit.

Anmerkung. Da in diesen Quotienten 0 bereits als Dividend, und mit dem Dividend 0 auch als Divisor fungirt hat, könnte vielleicht gefragt werden, was für ein Resultat die Division irgend einer Zahl durch 0 gäbe. Darauf die Antwort, daß der Ausdruck $\frac{a}{0}$ nach den Begriffen der Division durchaus keinen Sinn habe, indem a nicht ein Produkt sein kann, dessen einer Faktor 0 ist. Wohl aber wird später, wenn wir allgemeine Differenzen als Divisoren einführen, auch der Ausdruck $\frac{a}{0}$ als formell zulässig sich erfinden.

2. Multiplikation und Division mit negativen Zahlen.

$$a \times (-b) = a \times (0 - b) \overset{28}{=} (a \times 0) - (a \times b) = 0 - (a \times b) = -ab;$$

d. h. eine positive und eine negative Zahl werden multiplizirt, indem man die Zahlen selbst multiplizirt, das erhaltene Produkt aber negativ nimmt.

$$(-a) \times (-b) = -[(-a) \times b]^{*}) = -[-(a \times b)] =$$
$$= 0 - [0 - (a \times b)]$$
$$= (0 - 0) + (a \times b) = ab$$

d. h. zwei negative Zahlen werden mit einander multiplizirt, indem man die Zahlen selbst multiplizirt, das erhaltene Produkt aber positiv nimmt.

Fassen wir die möglichen Fälle der Multiplikation positiver und negativer Zahlen alle zusammen, so ist:

1) $a \times b = ab$
2) $(-a) \times b = -ab$
3) $a \times (-b) = -ab$
4) $(-a) \times (-b) = ab$

Aus dieser Zusammenstellung geht die kurze Regel hervor: Das Produkt ist positiv, wenn beide Faktoren gleiche Zeichen haben, aber negativ, wenn ungleiche. (Signa eadem dant plus, signa diversa minus).

Da nach dieser Regel aus den Zeichen der Faktoren das des Produktes hervorgeht, so ist umgekehrt von den Zeichen des Produktes und des einen Faktors auch der Schluß auf das Zeichen des andern Faktors möglich, oder mit andern Worten, von den Zeichen des Dividends und Divisors kann auf das des Quotienten geschlossen werden. Demzufolge ist:

1) $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

2) $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$

3) $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

4) $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$

Ist nämlich wie z. B. in 2) das Produkt $(-a)$ negativ, aber der gegebene Faktor b positiv, so muß der andere Faktor, der Quotient, negativ sein, weil sonst das Produkt nicht negativ sein

---

*) Hier ist $(-a)$ als positive Zahl d. h. als Zahl überhaupt genommen und mit der negativen Zahl $(-b)$ nach der vorausgehenden Regel multiplizirt worden.

könnte. Oder ist wie in 4) das Produkt (— a) negativ, aber der gegebene Faktor (— b) auch negativ, so muß der andere Faktor, der Quotient, positiv sein, weil sonst das Produkt nicht negativ sein könnte. Und so auch in den Fällen 1) und 3).

Aus den vier Fällen der Division geht übrigens für diese die gleiche Regel hervor, wie für die Multiplikation, nämlich: Gleiche Zeichen geben (+), und ungleiche (—).

§. 31.

Ehe wir von der Multiplikation und Division der Summen und Differenzen auf die der Aggregate übergehen, müssen wir uns der in den gemischten Gesetzen etwa nicht nothwendigen Klammern entledigen. Nun dürfen wir in keiner dieser Gleichungen die Klammern alle ohne Weiteres hinweglassen, weil damit alle Gleichungen unwahr würden, indem z. B. $a - b \times c$ keineswegs $= a \times c - b \times c$, und so auch bei den übrigen; allein, da Produkte und Quotienten sogar nach einem Multiplikationszeichen nicht in Klammern zu stehen brauchen, so wird dieß nach einem (+) oder (—) Zeichen noch weniger nothwendig, und werden somit wenigstens die Klammern überflüssig sein, welche in den direkten Gesetzen je auf der zweiten Seite vorkommen. Hienach bleiben nur die Klammern auf den ersten Seiten, d. i. diejenigen in Geltung, welche eine Summe oder eine Differenz einschließen, die einen Faktor oder einen Theil eines Quotienten vorstellen. Aber auch bei diesen letzteren, den Theilen eines Quotienten nämlich wird die Klammer überflüssig, wenn man die Division nach §. 24. durch den Querstrich anzeigt, welcher unter dem ganzen Dividende hingezogen für diesen zugleich die Stelle der Klammer vertritt, den Divisor aber ohnehin durch seine Stellung unter der Linie kenntlich macht. Für die Produkte ist zwar der Zweideutigkeit, die man vielleicht z. B. in $a \times c - b \times c$ finden möchte, indem man $c - b$ für Einen Faktor ansähe, schon durch die Erklärung vorgebeugt, daß Summen und Differenzen in Klammern stehen müssen, wenn sie Faktoren sind, was dann in unserm Beispiele die Möglichkeit ausschließt, daß $c - b$ Ein Faktor sei — dennoch aber ist es auch für diese räthlicher und ohnehin schon in §. 24 vorgeschrieben, die abgekürzte Bezeichnung der Multiplikation anzuwenden, womit dann jeder irrthümlichen Auffassung die Möglichkeit benommen ist. Diesen Bemerkungen ge-

mäß formuliren sich denn die vier gemischten Gesetze in folgender Weise:

$$1)\ (a+b)\,c = ac+bc;$$
$$2)\ (a-b)\,c = ac-bc;$$
$$3)\ \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c};$$
$$4)\ \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c}-\frac{b}{c}.$$

§. 32.

Wie wir hinsichtlich der beiden ersten Rechnungsarten die Rechnung mit Summen und Differenzen auf die mit Aggregaten, als den beide in sich begreifenden Resultaten gebracht haben, eben so müssen wir das auch hinsichtlich der Multiplikation und Division thun, und daher zeigen, 1) wie ein Aggregat mit einer Zahl multiplizirt, 2) durch eine Zahl dividirt wird.

1) $$(a-b-c+d-e+f)\times m$$
$$= \{[(a-b)-c]+[(d-e)+f]\}\times m$$
$$= \{[(a-b)-c]\times m\}+\{[(d-e)+f]\times m\}$$
$$= \{[(a-b)\times m]-(c\times m)\}+\{[(d-e)\times m]+(f\times m)\}$$
$$= \{[(a\times m)-(b\times m)]-(c\times m)\}+\{[(d\times m)-(e\times m)]+(f\times m)\}$$
$$= am-bm-cm+dm-em+fm,$$

d. h. ein Aggregat wird mit einer Zahl multiplizirt, indem man jedes Glied mit der Zahl multiplizirt und die erhaltenen Produkte mit ihren Zeichen wieder zu einem Aggregate an einander reiht.

2) $$(a+b-c-d+e-f):m$$
$$= \big(\{[(a+b)-c]-d\}+(e-f)\big):m$$
$$= \big(\{[(a+b)-c]-d\}:m\big)+[(e-f):m]$$
$$= \big(\{[(a+b)-c]:m\}-(d:m)\big)+[(e:m)-(f:m)]$$
$$= \big(\{[(a:m)+(b:m)]-(c:m)\}-(d:m)\big)+[(e:m)-(f:m)]$$
$$= \frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}-\frac{d}{m}+\frac{e}{m}-\frac{f}{m}$$

d. h. ein Aggregat wird durch eine Zahl dividirt, indem man jedes Glied desselben durch die Zahl dividirt und die erhaltenen Quotienten mit ihren Zeichen wieder zu einem Aggregate an einander reiht.

Beispiele.

1) $\frac{ab - b + c}{b} = \frac{ab}{b} - \frac{b}{b} + \frac{c}{b} = a - 1 + \frac{c}{b}$.

2) $\frac{9a - 13}{4} = \frac{9a}{4} - \frac{13}{4} = \frac{8a + a}{4} - \frac{12 + 1}{4} = \frac{8a}{4} + \frac{a}{4} - \left(\frac{12}{4} + \frac{1}{4}\right) = 2a + \frac{a}{4} - 3 - \frac{1}{4} = 2a - 3 + \frac{a - 1}{4}$.

§. 33.

In §. 29. haben wir gefragt, wie werden Produkte und Quotienten addirt, und wie solche subtrahirt; auch diese einzelnen Fragen gehen nun wieder in die Gesammt-Frage über: wie werden Produkte und Quotienten summirt? Darauf geben die zwei Gleichungen des vorhergehenden §. 32., umgekehrt gelesen, die Antwort:

1) Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, werden summirt, indem man deren nicht gemeinschaftliche Faktoren nach den Zeichen der Produkte summirt und die erhaltene Summe mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizirt.

2) Quotienten, die einen gemeinschaftlichen Divisor haben, werden summirt, indem man deren Dividende nach den Zeichen der Quotienten summirt und die erhaltene Summe durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

Beispiele für 1)

1) $abd - bcd - bdf = (a - c - f)\,bd$.

2) $30ac - 45bd - 48ab - 40ac + 20bd - 6ab + 12ac$
$= 30ac - 40ac + 12ac - 45bd + 20bd - 48ab - 6ab$
$= 2ac - 35bd - 54ab$.

Nebenrechnung.

$30 - 40 = -10$; $-10 + 12 = 2$; $-45 + 10 = -35$;
$-48 - 6 = -54$.

3) $15ab - 20bc + 18ad - 24cd =$
$= 3a \cdot 5b - 4c \cdot 5b + 3a \cdot 6d - 4c \cdot 6d$
$= (3a - 4c)\,5b + (3a - 4c)\,6d$
$= (5b + 6d)\,(3a - 4c)$.

4) $(m-4)x-(2m-5)x+(m+1)x=2x.$

Nebenrechnung.

$$(m-4)-(2m-5)=m-4-2m+5=-m+1;$$
$$(-m+1)+(m+1)=-m+1+m+1=2.$$

5) $(n-33)a-(3n+5)a+37a+(2n+2)a=a.$

Nebenrechnung.

$$(n-33)-(3n+5)=n-33-3n-5=-2n-38;$$
$$(-2n-38)+37=-2n-38+37=-2n-1;$$
$$(-2n-1)+2n+2=-2n-1+2n+2=1.$$

Beispiele für 2)

1) $\frac{cd}{f}-\frac{de}{f}+\frac{dx}{f}=\frac{cd-de+dx}{f}=\frac{(c-e+x)d}{f}.$

2) $\frac{7}{5}-\frac{19}{5}-\frac{11}{5}+\frac{26}{5}=\frac{3}{5}.$

3) $\frac{3a-b}{a}-\frac{4c-2b}{a}+\frac{a+3c}{a}-\frac{b-c}{a}$

$$=\frac{3a-b-4c+2b+a+3c-b+c}{a}$$

$$=\frac{3a+a-b+2b-b-4c+3c+c}{a}$$

$$=\frac{4a+0.b+0.c}{a}$$

$$=\frac{4a}{a}=4.$$

4) $\frac{3a-4}{6c}-\frac{7a+8}{6c}+\frac{5a+12}{6c}-\frac{a}{6c}$

$$=\frac{3a-4-7a-8+5a+12-a}{6c}$$

$$=\frac{3a-7a+5a-a-4-8+12}{6c}$$

$$=\frac{0.a+0}{6c}=\frac{0}{6c}=0 \text{ u. dgl. mehr.}$$

§. 34.

Sind zwei Quotienten mit ungleichen Divisoren zu summiren, z. B. $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$, so kann vermittelst der im §. 27. gegebenen Re-

gel, nach welcher ein Quotient derselbe bleibt, man mag Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliziren oder durch dieselbe Zahl dividiren, sowohl der Quotient $\frac{a}{c}$ auf den Divisor d, als auch $\frac{b}{d}$ auf den Divisor c gebracht werden. Nun ist, wenn etwa das Letztere geschehen soll, $c = d \times \frac{c}{d}$, d. h. man berechnet aus dem gegebenen Divisor d den neuen c, indem man den letztern durch den ersteren dividirt und mit dem dadurch erhaltenen Quotienten $\frac{c}{d}$ den gegebenen Divisor d multiplizirt; mithin wird auch der ganze Quotient seinem Werthe unbeschadet auf den neuen Divisor gebracht, indem man mit jenem Quotienten $\frac{c}{d}$ dessen Dividend sowohl als Divisor multiplizirt. Es ist also

$$\frac{b}{d} = \frac{b \cdot \frac{c}{d}}{d \cdot \frac{c}{d}} = \frac{\left(\frac{bc}{d}\right)}{c}.$$

Aber wollen wir jetzt $\frac{a}{c} + \frac{\left(\frac{bc}{d}\right)}{c}$ wirklich addiren, so erhalten wir zwar $\frac{a + \frac{bc}{d}}{c}$, allein die im Dividend anbefohlene Summation ist aus demselben Grunde wie die ursprünglich anbefohlene so lange unausführbar, als der Divisor d nicht verschwindet. Das geschieht aber nur dann, wenn d in c als Faktor enthalten ist. Daraus geht für den neuen Divisor die Regel hervor, daß er den gegebenen Divisor als Faktor in sich enthalten müsse. In unserer Aufgabe kann daher der neue Divisor, d. i. der gemeinschaftliche für beide Quotienten, nicht c, sondern da er sowohl c als d in sich als Faktoren enthalten muß, kann er nur das Produkt von beiden, also cd sein.

Es ist nun:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad + bc}{cd}.$$

Würde man nun für mehrere zu summirende Quotienten den gemeinschaftlichen Divisor dadurch herstellen, daß man alle einzel-

nen Divisoren mit einander multiplizirte, so könnte wohl der Fall vorkommen, daß der eine oder andere der folgenden Divisoren oder wenigstens der eine oder andere Faktor eines solchen bereits im Produkte aus den vorausgehenden Faktoren enthalten wäre. Natürlich wäre es überflüssig, einen solchen Divisor oder Faktor noch einmal in das Gesammt-Produkt aufzunehmen, dieses würde dadurch nur unnöthig vergrößert und damit die Rechnung erschwert. Dieß zu vermeiden und so für die gegebenen Divisoren den möglich kleinsten gemeinschaftlichen Divisor zu finden, hat man folgende erste Regel:

Man zerlege die gegebenen Divisoren nach einander in ihre Faktoren, behalte die Faktoren des ersten Divisors und von den folgenden Divisoren diejenigen bei, welche nicht bereits in den vorausgehenden enthalten waren, während man die andern hierin bereits enthaltenen wegstreicht, und stelle das Produkt aus allen beibehaltenen Faktoren her, so ist dieses der kleinste gemeinschaftliche Divisor.

Anmerkung. Enthält ein und derselbe Divisor irgend einen Faktor mehr als einmal z. B. $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, so ist ein 1ter, 2ter, 3ter Faktor, in unserm Falle eine erste 2, eine zweite 2 ꝛc. wohl zu unterscheiden, und z. B. die zweite 2 nicht wegzulassen, wenn in den vorausgehenden Divisoren erst eine 2 enthalten ist.

Auf den gefundenen gemeinschaftlichen Divisor nun werden der im Eingange des §. gegebenen Entwicklung gemäß alle einzelnen Quotienten nach folgender zweiter Regel gebracht:

Man dividire den gemeinschaftlichen Divisor durch den Divisor des jeweiligen Quotienten und multiplizire mit der dadurch erhaltenen Zahl sowohl den Dividend als den Divisor.

Beispiele.

1) $\frac{3}{8} - \frac{5}{12} - \frac{7}{10} + \frac{5}{18} = \frac{135}{360} - \frac{150}{360} - \frac{252}{360} + \frac{100}{360} = -\frac{167}{360}$.

Nebenrechnung.

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ | $135 - 150 = -15$
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ | $-15 - 252 = -267$
$16 = 2 \cdot 5$ | $-267 + 100 = -167$
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 = 360$

2) $\frac{3a}{5b} - \frac{7b}{8c} + \frac{11a}{15c} - \frac{c}{20b} - \frac{17c}{18a} + \frac{21b}{25a} =$

$= \frac{1080aac}{1800abc} - \frac{1575abb}{1800abc} + \frac{1320aab}{1800abc} - \frac{90acc}{1800abc} - \frac{1700bcc}{1800abc} + \frac{1512bbc}{1800abc} =$

$= \frac{1320aab + 1080aac - 1575abb + 1512bbc - 90acc - 1700bcc}{1800abc}$

$= \frac{(11b + 9c)\,120aa - (25a - 24c)\,63bb - (9a + 170b)\,10cc}{1800abc}.$

Nebenrechnung.

$5b = 5 \,.\, b$

$8c = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, c$

$15c = 3 \,.\, 5 \,.\, c$ *)

$20b = 2 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, b$

$18a = 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, a$

$25a = 5 \,.\, 5 \,.\, a$

$2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, abc = 1800abc$

3) $\frac{a}{b} - \frac{bb + aa}{ab} + \frac{b + 2}{a} - \frac{ab + 2c}{ac} =$

$= \frac{aac}{abc} - \frac{bbc + aac}{abc} + \frac{bbc + 2bc}{abc} - \frac{abb + 2bc}{abc}$

$= \frac{aac - bbc - aac + bbc + 2bc - abb - 2bc}{abc}$

$= \frac{aac - aac - bbc + bbc + 2bc - 2bc - abb}{abc}$

$= \frac{-abb}{abc} = -\frac{b}{c}.$

4) $\frac{5ax - 2y}{5x} - \frac{9b - 8c}{12c} + \frac{15bx + 8cy}{20cx} - \frac{2 + 3x}{3} =$

$= \frac{(5ax - 2y) \,.\, 12c}{60cx} - \frac{(9b - 8c) \,.\, 5x}{60cx} + \frac{(15bx + 8cy) \,.\, 3}{60cx} - \frac{(2 + 3x)\,20cx}{60cx} =$

Nebenrechnung.

$5x = 5 \,.\, x$

$12c = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, c$

$20cx = 2 \,.\, 2 \,.\, 5 \,.\, c \,.\, x$

$3 = 3$

$2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, cx = 60cx$

*) Wegen Mangels an durchstrichenen Buchstaben konnten die wegzulassenden Buchstaben-Faktoren nicht abgestrichen werden.

$$= \frac{(60acx-24cy)-(45bx-40cx)+(45bx+24cy)-(40cx+60cxx)}{60cx}$$

$$= \frac{60acx-24cy-45bx+40cx+45bx+24cy-40cx-60cxx}{60cx}$$

$$= \frac{60acx-60cxx-24cy+24cy-45bx+45bx+40cx-40cx}{60cx}$$

$$= \frac{(a-x).60cx}{60cx} = a-x.$$

§. 35.

Sowohl bei der Zerlegung der Diviſoren in ihre Faktoren als auch bei den in den Nebenregeln des §. 27. vorgeſchriebenen Verkleinerungen, iſt es nöthig, von vorne herein mindeſtens die einfacheren Faktoren der Zifferzahlen zu kennen. Zu dieſem Behufe gibt man gewöhnlich einige Regeln, nach welchen ſich beurtheilen läßt, ob eine Zahl durch 2, 4, 8 u. ſ. w. oder durch 5 oder auch durch 3 oder 9 theilbar ſei oder nicht, ohne aber wenigſtens bei den letzteren die Entwicklung der Regeln ſelbſt mitzutheilen und ſo die Quelle zu zeigen, aus der nicht bloß dieſe, ſondern auch noch weitere Regeln der Art abzuleiten ſind. Es werden daher dieſe und ähnliche Regeln ſammt ihrer Begründung in Folgendem gegeben:

Bezeichnen wir die Ziffern einer beliebigen, im dekadiſchen Syſteme gegebenen Zahl von rechts nach links mit α, β, γ, δ, ε, ζ ꝛc., ſo daß α die Zahl der Einheiten, β die der Zehner vorſtellt u. ſ. w., ſo iſt der Ausdruck einer ſolchen Zahl

$M = \alpha + 10\beta + 100\gamma + 1000\delta + 10{,}000\varepsilon + \ldots.$; die Zahl M ſelbſt aber iſt durch irgend eine andere Zahl theilbar, wenn dieſer ihr Ausdruck es iſt. Es iſt nun:

1) $\frac{M}{2} = \frac{\alpha}{2} + (5\beta + 50\gamma + 500\delta + \ldots.)$, d. h. die Zahl M iſt durch 2 theilbar oder mit andern Worten, ſie läßt ſich ohne Reſt durch 2 dividiren, wenn α durch 2 theilbar iſt; das iſt der Fall, wenn $\alpha = 2$ oder 4 oder 6 oder 8, allgemein eine gerade Zahl iſt, daher die bekannte Regel:

„Eine Zahl iſt durch 2 theilbar, wenn ihre Endziffer eine gerade Zahl iſt."

2) $\frac{M}{4} = \frac{\alpha}{4} + \frac{10\beta}{4} + 25\gamma + 250\delta + 2500\varepsilon + \ldots.$

$\frac{M}{4} = \frac{\alpha + 10\beta}{4} + (25\gamma + 250\delta + 2500\varepsilon + \ldots.)$, d. h. der Quotient $\frac{M}{4}$ ist eine ganze Zahl, oder M durch 4 ohne Rest theilbar, wenn $\alpha + 10\beta$, d. i. die Zahl, welche die beiden letzten Ziffern vorstellen, durch 4 theilbar ist, indem der in Klammern geschlossene Theil des Quotienten ohnehin aus lauter ganzen Zahlen besteht. Beispiel: $\frac{13576}{4} = 3394$.

Anmerkung. Im gegebenen bestimmten Falle erklärt sich diese Regel einfach durch: $\frac{13576}{4} = \frac{13500}{4} + \frac{76}{4}$, von welchen beinen Quotienten der erstere immer eine ganze Zahl, weil 100 durch 4 theilbar ist.

3) $\frac{M}{8} = \frac{\alpha}{8} + \frac{10\beta}{8} + \frac{100\gamma}{8} + 125\delta + 1250\varepsilon + \ldots. =$

$= \frac{\alpha + 10\beta + 100\gamma}{8} + (125\delta + 1250\varepsilon + \ldots.)$,

daher die bekannte Regel:

„Eine Zahl ist durch 8 theilbar, wenn die Zahl es ist, welche ihre drei letzten Ziffern vorstellen."

4) $\frac{M}{5} = \frac{\alpha}{5} + (2\beta + 20\gamma + 200\delta + 2000\varepsilon + \ldots.)$,

d. h. die Zahl ist durch 5 theilbar, wenn α, d. i. ihre letzte Ziffer durch 5 theilbar, was der Fall, wenn selbe $= 0$ oder $= 5$.

5) $\frac{M}{3} = \frac{a}{3} + \frac{10\beta}{3} + \frac{100\gamma}{3} + \frac{1000\delta}{3} + \frac{10000\varepsilon}{3} + \ldots. =$

$= \frac{\alpha}{3} + 3\beta + \frac{\beta}{3} + 33\gamma + \frac{\gamma}{3} + 333\delta + \frac{\delta}{3} + 3333\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} + \ldots. =$

$= \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots}{3} + (3\beta + 33\gamma + 333\delta + 3333\varepsilon + \ldots)$.

Da hier wieder der 2te in Klammer stehende Theil nur aus ganzen Zahlen besteht, so ist der ganze Ausdruck eine ganze Zahl, wenn auch der erste Theil, nämlich der Quotient $\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots.}{3}$ eine solche ist. Das sagt:

„Eine Zahl ist durch 3 theilbar, wenn es die Summe ihrer einzelnen Ziffern ist."

$$6)\ \frac{M}{9} = \frac{\alpha}{9} + \frac{10\beta}{9} + \frac{100\gamma}{9} + \frac{1000\delta}{9} + \frac{10000\varepsilon}{9} + \ldots =$$

$$= \frac{\alpha}{9} + \beta + \frac{\beta}{9} + 11\gamma + \frac{\gamma}{9} + 111\delta + \frac{\delta}{9} + 1111\varepsilon + \frac{\varepsilon}{9} + \ldots =$$

$$= \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots}{9} + (\beta + 11\gamma + 111\delta + 1111\varepsilon + \ldots)$$

Daraus leitet sich, wie im vorigen Falle, die Regel ab:

„Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn es die Summe ihrer einzelnen Ziffern ist."

$$7)\ \frac{M}{11} = \frac{\alpha}{11} + \frac{10\beta}{11} + \frac{100\gamma}{11} + \frac{1000\delta}{11} + \frac{10000\varepsilon}{11} + \frac{100000\zeta}{11} + \ldots =$$

$$= \frac{\alpha}{11} + \frac{11\beta - \beta}{11} + \frac{99\gamma + \gamma}{11} + \frac{1001\delta - \delta}{11} + \frac{9999\varepsilon + \varepsilon}{11} + \frac{100001\zeta - \zeta}{11} + \ldots =$$

$$= \frac{\alpha}{11} + \beta - \frac{\beta}{11} + 9\gamma + \frac{\gamma}{11} + 91\delta - \frac{\delta}{11} + 909\varepsilon + \frac{\varepsilon}{11} + 9091\zeta - \frac{\zeta}{11} + \ldots =$$

$$= \frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \zeta + \ldots}{11} + (\beta + 9\gamma + 91\delta + 909\varepsilon + 90912 + \ldots)$$

Der ganze Ausdruck ist wieder eine ganze Zahl und so M durch 11 theilbar, wenn der erste Theil $\frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \zeta + \ldots}{11}$ eine ganze Zahl ist. Nun ist: $(\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon - \zeta + \ldots)$ offenbar die Summe der abwechselnd positiv und negativ genommenen Ziffern, mithin gilt die Regel:

„Eine Zahl ist durch 11 theilbar, wenn die Summe aus ihren abwechselnd positiv und negativ genommenen Ziffern durch 11 theilbar ist."

Beispiele: $\frac{132}{11} = 12$, weil $1 - 3 + 2 = 0$ und 0 durch 11 theilbar;

$\frac{35761}{11} = 3251$, weil $3 - 5 + 7 - 6 + 1 = 11 - 11 = 0$;

$\frac{739156}{11} = 67196$, weil $7 - 3 + 9 - 1 + 5 - 6 = 21 - 10 = 11$ und $\frac{11}{11} = 1$.

8) $\frac{M}{7} = \frac{\alpha}{7} + \frac{10\beta}{7} + \frac{100\gamma}{7} + \frac{1000\delta}{7} + \frac{10000\varepsilon}{7} + \frac{100000\zeta}{7} + \ldots =$

$= \frac{\alpha}{7} + \frac{7\beta + 3\beta}{7} + \frac{98\gamma + 2\gamma}{7} + \frac{1001\delta - \delta}{7} + \frac{10003\varepsilon - 3\varepsilon}{7} + \frac{100002\zeta - 2\zeta}{7} + \ldots =$

$= \frac{\alpha}{7} + \beta + \frac{3\beta}{7} + 14\gamma + \frac{2\gamma}{7} + 143\delta - \frac{\delta}{7} + 1429\varepsilon - \frac{3\varepsilon}{7} + 142862\zeta - \frac{2\zeta}{7} + \ldots =$

$= \frac{(\alpha + 3\beta + 2\gamma) - (\delta + 3\varepsilon + 2\zeta) + (\ldots.) - (\ldots.)}{7}$

$+ \beta + 14\gamma + 143\delta + 1429\varepsilon + 142862\zeta + \ldots$

Der ganze Ausdruck stellt wieder eine ganze Zahl vor, wenn $\frac{(\alpha + 3\beta + 2\gamma) - (\delta + 3\varepsilon + 2\zeta) + \ldots}{7}$ eine solche ist. Aber man erhält den Dividend dieses Ausdruckes, wenn man von der Stelle der Einheiten anfangend je 3 auf einander folgende Ziffer nach einander mit 1, 3, 2 multiplizirt, diese Produkte addirt, und die erhaltenen Summen abwechselnd positiv und negativ nimmt und summirt. Ist also die so erhaltene Gesammt-Summe durch 7 theilbar, so ist es die ganze Zahl.

Z. B. $\frac{343}{7} = 49$, weil $\frac{1.3 + 3.4 + 2.3}{7} = \frac{3 + 12 + 6}{7} = \frac{21}{7} = 3$;

$\frac{6698251}{7} = 956893$, weil $\frac{(1 + 15 + 4) - (8 + 27 + 12) + 6}{7} = \frac{20 - 47 + 6}{7} = -\frac{21}{7} = -3$;

$\frac{956893}{7} = 136699$, weil $\frac{(3 + 27 + 16) - (6 + 15 + 18)}{7} = \frac{46 - 39}{7} = \frac{7}{7} = 1$.

$$9)\ \frac{M}{13} = \frac{\alpha}{13} + \frac{10\beta}{13} + \frac{100\gamma}{13} + \frac{1000\delta}{13} + \frac{10000\varepsilon}{13} + \frac{100000\zeta}{13}$$
$$+ \frac{1000000\eta}{13} + \ldots. =$$
$$= \frac{\alpha}{13} + \frac{13\beta - 3\beta}{13} + \frac{104\gamma - 4\gamma}{13} + \frac{1001\delta - \delta}{13} +$$
$$\frac{9997\varepsilon + 3\varepsilon}{13} + \frac{99996\zeta + 4\zeta}{13} + \frac{999999\eta + \eta}{13} + \ldots =$$
$$= \frac{\alpha}{13} + \beta - \frac{3\beta}{13} + 8\gamma - \frac{4\gamma}{13} + 77\delta - \frac{\delta}{13} + 769\varepsilon + \frac{3\varepsilon}{13}$$
$$+ 76923\zeta + \frac{4\zeta}{13} + 76923\eta + \frac{\eta}{13} + \ldots. =$$
$$= \frac{\alpha - (3\beta + 4\gamma + \delta) + (3\varepsilon + 4\zeta + \eta) - \ldots.}{13} + \beta$$
$$+ 8\gamma + 77\delta + 769\varepsilon + 76923\zeta + 76923\eta + \ldots.$$

Den Ausdruck $\alpha - (3\beta + 4\gamma + \delta) + (3\varepsilon + 4\zeta + \eta) + \ldots$, von dessen Theilbarkeit durch 13 die Theilbarkeit der gegebenen Zahl allein abhängt, stellt man her, indem man von der Stelle der Zehner anfangend je drei Ziffer nach einander mit 3, 4, 1 multiplizirt, die erhaltenen Produkte summirt, und aus diesen Summen, abwechselnd negativ und positiv genommen, mit der Ziffer der Einheiten eine Gesammt-Summe bildet. Ist die so erhaltene Gesammt-Summe durch 13 theilbar, so ist es die gegebene Zahl selbst.

Z. B. $\frac{169}{13} = 13$, weil $\frac{9 - (3.6 + 4.1)}{13} = \frac{9 - (18 + 4)}{13} = 9 - 22$
$$= \frac{-13}{13} = -1;$$
$$\frac{79326}{13} = 6102, \text{ weil } \frac{6 - (3.2 + 4.3 + 1.9) + 3.7}{13} =$$
$$\frac{6 - (6 + 12 + 9) + 21}{13} = \frac{27 - 27}{13} = \frac{0}{13} = 0;$$
$$\frac{1031264}{13} = 79328, \text{ weil } \frac{4 - (18 + 8 + 1) + (9 + 1)}{13} = \frac{14 - 27}{13}$$
$$= \frac{-13}{13} = -1.$$

Endlich noch den einfachsten Fall:

$$10)\ \frac{M}{10} = \frac{\alpha}{10} + \beta + 10\gamma + 100\delta + 1000\varepsilon + \ldots,$$ wornach

die Zahl durch 10 theilbar, wenn α es ist, was aber nur dann der Fall, wenn $\alpha = 0$, daher die Regel:

„Durch 10 ist jede Zahl theilbar, die mit 0 schließt."

Bemerkt man hiezu, daß jede Zahl durch 6 theilbar ist, wenn durch 2 und 3, durch 12, 14 und 15, wenn durch 3 und 4, durch 2 und 7, durch 3 und 5, so hat man die Regeln für die Theilbarkeit durch die Zahlen bis 15 incl. vollständig, könnte aber die Reihe derselben ganz in der nämlichen Weise noch beliebig weiter auch für größere Zahlen fortsetzen, wenn sich auch gerade nicht mehr so einfache und darum brauchbare Resultate ergeben wie bisher.

§. 36.

Wir haben im Vorhergehenden in dem Aggregate, dessen Glieder Produkte und Quotienten, die am meisten zusammengesetzte algebraische Größe, gleichsam das gemeinsame Resultat der bisherigen vier Rechnungsarten zusammen kennen gelernt. Solche Aggregate nun nicht bloß wie bisher mit Zahlen, sondern auch wieder mit Aggregaten, und zwar durch alle vier Rechnungsarten zu verbinden, erscheint als die höchste im Bereiche der ersten vier Rechnungsarten mögliche Aufgabe. Also zuerst

Addition und Subtraktion von Aggregaten unter sich.

Wie Aggregate zu andern Ausdrücken addirt oder davon subtrahirt werden, wissen wir bereits aus §. 17.; es kann sich also hier bloß darum handeln, bestimmte Rechnungs-Vortheile und Abkürzungen, wie die verschiedenen Arten von Aggregaten solche an die Hand geben, namhaft zu machen. Dabei kommt es vor Allem darauf an, ob die Aggregate summirbare Glieder enthalten, oder nicht. Haben sie solche nicht, wie im folgenden Beispiele 1), so bleibt nichts übrig, als sie nach den Regeln des §. 17. wirklich zu addiren oder zu subtrahiren, und hierauf die Glieder etwa alphabetisch aneinander zu reihen, wobei immerhin noch, falls doch einige summirbare Glieder, wie in 2), vorhanden sein sollten, diese nebeneinander gestellt und hierauf summirt werden können.

Sind aber in den Aggregaten mehrfach summirbare Glieder vorhanden, so hat man die Anordnung getroffen, die zu summirenden Aggregate wie im dritten und den folgenden Beispielen so anzuschreiben, daß deren summirbare Glieder unter einander zu stehen kommen. Statt

des Gleichheitszeichens wird hiebei ein horizontaler Strich unter der Reihe der Summanden gezogen, und unter diesen die Summe gesetzt.

Beispiele.

1) $(a - c - f + h) - (d + e - m) + (b - g + l - n)$
$= a - c - f + h - d - e + m + b - g + l - n$
$= a + b - c - d - e - f - g + h + l + m - n.$

2) $(ab - cy + dx) - (bc - de - fg) - (ac - bf + hi)$
$= ab - cy + dx - bc + de + fg - ac + bf - hi$
$= ab - ac - bc + bf - cy + de + dx + fg - hi$
$= a(b - c) - b(c - f) - cy + d(e + x) + fg - hi.$

3) $17a - 20b - c + 11d$
$-\underset{(-)}{(}32a \underset{(-)}{+} 7c \underset{(+)}{-} 18d \underset{(+)}{-} 10e)$
$-(\quad b + 9c + 28d - 5e)$
$\underset{(-)}{} \underset{(-)}{} \underset{(-)}{} \underset{(+)}{}$
$\overline{20a + 21b + c - 2d - 8e}$
$\overline{5a \quad - 16c - d + 7e}$

4) $\frac{11}{4}x - \frac{7}{15}y - \frac{8}{9}z + \frac{13}{24}u$
$-\underset{(-)}{[}\frac{5}{12}x \underset{(+)}{-} \frac{8}{25}y \underset{(-)}{+} \frac{23}{36}z \underset{(+)}{-} \frac{7}{60}u]$
$\frac{3}{8}x + \frac{44}{45}y + \frac{3}{4}z - \frac{31}{36}u$
$-\underset{(-)}{[}\frac{5}{48}x \underset{(-)}{+} \frac{11}{5}y \underset{(+)}{-} \frac{14}{9}z \underset{(-)}{+} \frac{9}{8}u]$
$\overline{\frac{125}{48}x - \frac{308}{225}y + \frac{7}{9}z - \frac{239}{180}u}$

Nebenrechnung.

$\frac{11}{4} - \frac{5}{12} + \frac{3}{8} - \frac{5}{48} = \frac{132}{48} - \frac{20}{48} + \frac{18}{48} - \frac{5}{48} = \frac{125}{48};$

$-\frac{7}{15} + \frac{8}{25} + \frac{44}{45} - \frac{11}{5} = -\frac{105}{225} + \frac{72}{225} + \frac{220}{225} - \frac{495}{225} = -\frac{308}{225};$

$-\frac{8}{9} - \frac{23}{36} + \frac{3}{4} + \frac{14}{9} = -\frac{32}{36} - \frac{23}{36} + \frac{27}{36} + \frac{56}{36} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9};$

$\frac{13}{24} + \frac{7}{60} - \frac{31}{36} - \frac{9}{8} = \frac{195}{360} + \frac{42}{360} - \frac{310}{360} - \frac{405}{360} = -\frac{478}{360}$

$= -\frac{239}{180}.$

5) $\frac{4a}{5b} + \frac{5b}{6c} - \frac{6c}{7d} - \frac{7d}{8f}$

$$-\left[\underset{(-)}{\frac{9a}{10b}} \underset{(+)}{-} \frac{11b}{12c} \underset{(+)}{-} \frac{13c}{14d} \underset{(-)}{+} \frac{15d}{16f}\right]$$

$$-\left[\underset{(-)}{\frac{19a}{20b}} \underset{(-)}{+} \frac{17b}{18c} \underset{(+)}{-} \frac{20c}{21d} \underset{(+)}{-} \frac{23d}{24f}\right]$$

$$\frac{39a}{40b} + \frac{71b}{72c} - \frac{41c}{42d} + \frac{47d}{48f}$$

$$-\frac{3a}{40b} + \frac{43b}{24c} + \frac{c}{21d} + \frac{d}{8f}$$

Nebenrechnung.

$$\frac{4a}{5b} - \frac{9a}{10b} - \frac{19a}{20b} + \frac{39a}{40b} = \frac{32a}{40b} - \frac{36a}{40b} - \frac{38a}{40b} + \frac{39a}{40b} = -\frac{3a}{40b};$$

$$\frac{5b}{6c} + \frac{11b}{12c} - \frac{17b}{18c} + \frac{71b}{72c} = \frac{60b}{72c} + \frac{66b}{72c} - \frac{68b}{72c} + \frac{71b}{72c} = \frac{129b}{72c} = \frac{43b}{24c};$$

*) $-\frac{6}{7} + \frac{13}{14} + \frac{20}{21} - \frac{41}{42} = -\frac{36}{42} + \frac{39}{42} + \frac{40}{42} - \frac{41}{42} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21};$

$$-\frac{7}{8} - \frac{15}{16} + \frac{23}{24} + \frac{47}{48} = -\frac{42}{48} - \frac{45}{48} + \frac{46}{48} + \frac{47}{48} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}.$$

6) $5mx - (4m-3)y + (3m-6)z$

$$-\left[\underset{(-)}{(2m+2)x} \underset{(+)}{-} (3m+4)y \underset{(-)}{+} (4m+6)z\right]$$

$$-(3m-3)x + y + (m+2)z$$

$$x - (m-8)y + 10z$$

Nebenrechnung.

$5m$	$3m-2$	$4m-3$	$m-7$
$-\left[\underset{(-)}{2m} \underset{(-)}{+} 2\right]$	$3m-3$ **)	$3m+4$	1
$3m-2$	$\underset{(-)}{} \underset{(+)}{} 1$	$\underset{(-)}{} \underset{(-)}{} -(m-7)$	$\underset{(-)}{} -(m-8)$

*) Man sieht aus der Summation der ersten und aus der der zweiten Glieder, daß die Buchstaben-Faktoren des Resultats dieselben sind, wie die der gegebenen Glieder; man nimmt daher in der Nebenrechnung von diesen Buchstaben-Faktoren Umgang.

**) In solchen Fällen, besonders der Nebenrechnung, wo der zu subtrahirende Ausdruck, wie hier (3m — 3) ohnehin sogleich subtrahirt wird, unterlassen wir es, die Subtraktion erst anzuzeigen, sondern subtrahiren sogleich wirklich, was auch an den geänderten Zeichen ((+) (—)) zu erkennen ist.

$$\begin{array}{rr} 4m+6 & m+12 \\ 3m-6 & m+2 \\ \underset{(+)}{\underset{(-)}{\quad}} & \underset{(-)}{\underset{(-)}{\quad}} \\ \hline -(m+12) & -10 \end{array}$$

7) $27d+(m-2)c-(n+4)f+(2p-6)g-7h$

$$-\Big[\underset{(-)}{19d}\underset{(-)}{+}(m-n)e\underset{(+)}{-}(2n-6)f\underset{(-)}{+}(3p+3)g\Big]$$

$$\begin{array}{rrrrr} d & + & 8f & & -(n+9)h \\ md- & & ne-(n-2)f+ & & 8g \\ (m-3)d- & & 3e- & & f- \quad pg- \quad 16h \\ \underset{(-)}{\quad} & \underset{(+)}{\quad} & \underset{(+)}{\quad} & \underset{(+)}{\quad} & \underset{(+)}{\quad} \\ \hline 12d+ & & e+ & & f- \quad g- \quad nh \end{array}$$

Nebenrechnung.

$27-19+1=9$	$m-2$	n	$2n-6$	$n-10$
$m+9$	$m-n$	$n-2$	$n+4$	8
$m-3$	$\underset{(-)}{\underset{(+)}{\quad}}$	$\underset{(-)}{\underset{(+)}{\quad}}$	$\underset{(-)}{\underset{(-)}{\quad}}$	$\overline{\quad}$
$\underset{(-)}{\underset{(+)}{\quad}}$	$n-2$	-2	$n-10$	$n-2$
$\overline{\quad}$				$\underset{(-)}{\underset{(+)}{\quad}}$
12				0

$3p+3$	$p+9$	$p+1$	$n+9$	$n+16$
$2p-6$	8	p	7	16
$\underset{(-)}{\underset{(+)}{\quad}}$	$\underset{(-)}{\quad}$	$\underset{(-)}{\quad}$	$\overline{\quad}$	$\underset{(-)}{\quad}$
$-(p+9)$	$-(p+1)$	-1	$-(n+16)$	$-n$

8) Zur Uebung in der Rechnung mit positiven und negativen Zahlen, besonders aber, damit die Schüler sich gewöhnen, die mit Buchstaben bezeichneten Ausdrücke in ihrer wahren Bedeutung aufzufassen, mag man über derartige Summations-Aufgaben die Probe in der Weise machen, daß man statt der Buchstaben = beliebige Zifferzahlen setzt, mit diesen erst die einzelnen Summanden, und aus ihnen ihre Summe, und dann die bereits berechnete Summe herstellt; diese beiderseitigen Resultate müssen, wenn richtig gerechnet worden ist, die gleichen sein, worin eben die gewünschte Probe liegt.

Es sei z. B. in der Aufgabe 7,

$m=5$, $n=6$, $p=7$; ferner

$d=1$, $e=4$, $f=5$, $g=3$; $h=3$. Nun ist

1) $27.1+(5-2).4-(6+4).5+(14-6).3-7.3$
$=27+12-50+24-21=-8$;

2) $-[19.1+(5-6).4-(12-6).5+(21+3).3]$
$=-[19-4-30+72]=-57$;

3) $1 + 8 \cdot 5 - (6 + 9) \cdot 3 = 1 + 40 - 45 = -4;$

4) $5 \cdot 1 - 6 \cdot 4 - (6 - 2) \cdot 5 + 8 \cdot 3 = 5 - 24 - 20 + 24 = -15;$

5) $-[(5-3) \cdot 1 - 3 \cdot 4 - 5 - 7 \cdot 3 - 16 \cdot 3] = -[2 - 12 - 5 - 21 - 48] = -(-84) = 84.$

Und

$-8 - 57 - 4 - 15 + 84 = -84 + 84 = 0$ (I. Resultat.)

Aber auch

$12 \cdot 1 + 4 + 5 - 3 - 6 \cdot 3 = 12 + 4 + 5 - 3 - 18 = 21 - 21 = 0$ (II. Resultat.)

9)
$$\frac{-\frac{n-2}{4} \cdot x - \frac{2n+3}{6} \cdot y + \frac{3n+4}{8} z \quad \frac{2n+5}{6} \cdot x + \frac{3n-6}{8} \cdot y - \frac{4n-7}{10} \cdot z \quad -\left[\underset{(-)}{\frac{3n+8}{8}} \cdot x \underset{(+)}{-} \frac{4n+9}{10} \cdot y \underset{(+)}{-} \frac{5n-10}{12} \cdot z\right] \quad -\left[\underset{(+)}{-\frac{4n-11}{10}} \cdot x \underset{(-)}{+} \frac{5n-12}{12} \cdot y \underset{(-)}{+} \frac{6n+13}{14} \cdot z\right]}{\frac{13n-92}{120} \cdot x + \frac{n+26}{40} \cdot y - \frac{31n+472}{840} \cdot z}$$

Nebenrechnung.

1) $-\frac{n-2}{4} + \frac{2n+5}{6} - \frac{3n+8}{8} + \frac{4n-11}{10} = -\frac{30n-60}{120} + \frac{40n+100}{120} - \frac{45n+120}{120} + \frac{48n-132}{120} = \frac{13n-92}{120}.$

$$\left|\begin{array}{lll} 40n+100 & 45n+120 & 48n-132 \\ :30n-60 & 10n+160 & 35n-40: \\ \underset{(-)}{\underset{(+)}{\overline{10n+160}}} & \underset{(-)}{\underset{(-)}{\overline{35n-40}}} & \underset{(-)}{\underset{(+)}{\overline{13n-92}}} \end{array}\right|$$

2) $-\frac{2n+3}{6} + \frac{3n-6}{8} + \frac{4n+9}{10} - \frac{5n-12}{12} = -\frac{40n+60}{120} + \frac{45n-90}{120} + \frac{48n+108}{120} - \frac{50n-120}{120} = \frac{3n+78}{120} = \frac{n+26}{40}.$

$$\left|\begin{array}{lll} 45n-90 & 48n+108 & 53n-42 \\ 40n+60 & 5n-150 & 50n-120: \\ \underset{(-)}{\underset{(-)}{\overline{5n-150}}} & \overline{53n-42} & \underset{(-)}{\underset{(+)}{\overline{3n+78}}} \end{array}\right|$$

3) $\frac{3n+4}{8} - \frac{4n-7}{10} + \frac{5n-10}{12} - \frac{6n+13}{14} = \frac{315n+420}{840}$

$- \frac{336n-588}{840} + \frac{350n-700}{840} - \frac{360n+780}{840} = - \frac{31n+472}{840}$.

$$\left|\begin{array}{ccc} 336n - 588 & 350n - 700 & 360n + 780 \\ : \; 315n + 420 & 21n - 1008 & 329n + 308 \; : \\ \frac{(-)\quad(-)}{-(21n-1008)} & \frac{(-)\quad(+)}{329n+308} & \frac{(-)\quad(-)}{-(31n+472)} \end{array}\right|$$

10) Es sei im vorhergehenden Beispiele: $x = y = z = 1$, und $n = 14$. Nun ist:

1) $- \frac{14-2}{4} - \frac{28+3}{6} + \frac{42+4}{8} = - \frac{12}{4} - \frac{31}{6} + \frac{46}{8} =$

$- 3 - \frac{31}{6} + \frac{23}{4} = - \frac{36}{12} - \frac{62}{12} + \frac{69}{12} = - \frac{29}{12}$;

2) $\frac{28+5}{6} + \frac{42-6}{8} - \frac{56-7}{10} = \frac{33}{6} + \frac{36}{8} - \frac{49}{10} = \frac{11}{2} +$

$\frac{9}{2} - \frac{49}{10} = 10 - \frac{49}{10} = \frac{51}{10}$;

3) $- \left[\frac{42+8}{8} - \frac{56+9}{10} - \frac{70-10}{12}\right] = - \left[\frac{50}{8} - \frac{65}{10} - \frac{60}{12}\right] =$

$= - \left[\frac{25}{4} - \frac{13}{2} - 5\right] = - \left(- \frac{21}{4}\right) = \frac{21}{4}$;

4) $- \left[- \frac{56-11}{10} + \frac{70-12}{12} + \frac{84+13}{14}\right] = - \left[- \frac{45}{10} + \frac{58}{12}\right.$

$\left. + \frac{97}{14}\right] = - \left[- \frac{9}{2} + \frac{29}{6} + \frac{97}{14}\right] = - \left[- \frac{189}{42} + \frac{203}{42} + \frac{291}{42}\right]$

$= - \left(\frac{305}{42}\right) = - \frac{305}{42}$.

5) $- \frac{29}{12} + \frac{51}{10} + \frac{21}{4} - \frac{305}{42} = - \frac{1015}{420} + \frac{2142}{420} + \frac{2205}{420} - \frac{3050}{420}$

$= \frac{282}{420} = \frac{47}{70}$ (I. Resultat).

Aber auch

6) $\frac{13 \,.\, 14 - 92}{120} + \frac{14+26}{40} - \frac{31 \,.\, 14 + 472}{840} = \frac{90}{120} + \frac{40}{40} -$

$\frac{906}{840} = \frac{3}{4} + 1 - \frac{151}{140} = \frac{3}{4} - \frac{11}{140} = \frac{105}{140} - \frac{11}{140} = \frac{94}{140} =$

$= \frac{47}{70}$ (II. Resultat).

§. 37.

Multiplikation von Aggregaten mit Aggregaten.

$$(a - b - c)(d + e - f) = [a(d + e - f)] - [b(d + e - f)] - [c(d + e - f)] =$$
$$= (ad + ae - af) - (bd + be - bf) - (cd + ce - cf) =$$
$$= ad + ae - af - bd - be + bf - cd - ce + cf.$$

Untersucht man, wie sich dieß Resultat unmittelbar aus der Aufgabe ableiten läßt, so findet sich, daß die Einzel-Produkte alle dadurch entstehen, daß alle Glieder des zweiten Aggregats nach einander mit dem ersten, zweiten, dritten ꝛc. Gliede des ersten, oder was dasselbe ist, alle Glieder des ersten nach einander mit allen des zweiten Aggregats multiplizirt werden; die erhaltenen Einzel-Produkte aber finden sich mit ihren zukommenden Zeichen an einander gereiht. Daher die Regel:

Zwei Aggregate werden mit einander multiplizirt, indem man alle Glieder des einen nach einander mit allen Gliedern des andern multiplizirt und die erhaltenen Produkte mit ihren Zeichen an einander reiht.

Etwaige Abkürzungen hängen von der Art der beiderseitigen Aggregate ab; es können nämlich

1) die Buchstabenfaktoren in den Gliedern des einen Aggregats ganz oder wenigstens größtentheils andere sein, als die in den Gliedern des andern Aggregats wie in $(a - b - c)(d + e - f)$ oder in $(a + b - m)(b - c + x)$;

2) die Buchstabenfaktoren in den Gliedern beider Aggregate der Reihe nach die nämlichen sein, wie in $(3a + 4b - 5c)(6a - 7b - 8c)$, außerdem aber

3) auch noch die Buchstabenfaktoren in den Gliedern eines jeden Aggregates für sich die nämlichen, jedoch in wechselnder, abnehmender oder zunehmender Menge wie in $(4x - 7xx + 3xxx)(2x - 3xx)$; die Aggregate dieser Art heißen unter sich symmetrische. Bei der ersten Art von Aggregaten sind keine Abkürzungen möglich; man schreibt daher die Faktoren wie bisher neben einander, und die Einzel-Produkte in einer Reihe hinter einander. Bei der zweiten und dritten Art jedoch lassen sich immer mehrere Einzel-Produkte summiren; diese schreibt man denn unter einander,

was, wenn beide Aggregate auf gleiche Weise geordnet sind, immer schon damit erreicht wird, daß man jede folgende Produkten-Reihe unter die vorhergehende setzt, und zwar mit ihrem ersten Gliede unter dem zweiten Gliede dieser. Uebrigens werden gewöhnlich auch bereits die Faktoren unter einander geschrieben (wobei dann die Klammern wegbleiben), und von dem Produkte durch einen horizontalen Strich getrennt, der die Stelle des Gleichheitszeichens vertritt. Aus den folgenden Beispielen wird das Gesagte noch deutlicher werden.

Beispiele.

1) $(3a - nb + cx) \times (7m + y - 3z) =$
$= 21am + 3ay - 9az - 7bmn - bny + 3bnz + 7cmx + cxy - 3cxz.$

2)
$$\begin{array}{r} -7x + 4y - 9z \\ 8x - 3y - z \\ \hline -56xx + 32xy - 72xz \\ +21xy - 12yy + 27yz \\ -7xz - 4yz + 9zz \\ \hline -56xx + 53xy - 65xz - 12yy + 23yz + 9zz \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r} 3aa - 4a - 5 \\ 6aaa + 7aa - 8a \\ \hline 18aaaaa - 24aaaa - 30aaa \\ +21aaaa - 28aaa - 35aa \\ -24aaa + 32aa + 40a \\ \hline 18aaaaa - 3aaaa - 82aaa - 3aa + 40a \end{array}$$

Anmerkung. Derartige Produkte aus gleichen Faktoren, wie sie in diesen Aufgaben vorkommen, formulirt man der Abkürzung wegen so, daß man den gleichen Faktor nur einmal setzt, und durch eine Ziffer, die man rechts darüber schreibt, anzeigt, wie oft er im Produkte steht. So angeschrieben wäre unser obiges Resultat folgendes:

$$18a^5 - 3a^4 - 82a^3 - 3a^2 + 40a.$$

4)
$$\begin{array}{r} \frac{5x^3}{4y} - \frac{6x^2}{5} - \frac{7xy}{6} + \frac{9y^2}{8} \\ \frac{9}{8y^2} + \frac{7}{6xy} - \frac{6}{5x^2} - \frac{5y}{4x^3} \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{45x^3}{32y^3} - \frac{27x^2}{20y^2} - \frac{21x}{16y} + \frac{81}{64}$$
$$+ \frac{35x^2}{24y^2} - \frac{7x}{5y} - \frac{49}{46} + \frac{21y}{16x}$$
$$- \frac{3x}{2y} + \frac{36}{25} + \frac{7y}{5x} - \frac{27y^2}{20x^2}$$
$$- \frac{25}{16} + \frac{3y}{2x} + \frac{35y^2}{24x^2} - \frac{45y^3}{32x^3}$$

$$\frac{45x^3}{32y^3} + \frac{13x^2}{120y^2} - \frac{337x}{80y} - \frac{3139}{14400} + \frac{337y}{80x} + \frac{13y^2}{120x^2} - \frac{45y^3}{32x^3}$$

Nebenrechnung.

a) $\frac{5xxx}{4y} \times \frac{9}{8yy} = \frac{45xxx}{32yyy}$ | $\frac{\overset{3}{\cancel{6}}xx}{5} \cdot \frac{9}{\underset{4}{\cancel{8}}yy} = \frac{27xx}{20yy}$

$\frac{7xy}{\underset{2}{\cancel{6}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{8yy} = \frac{21x}{16y}$ | $\frac{9yy}{8} \times \frac{9}{8yy} = \frac{81}{64}$;

b) $\frac{5xxx}{4y} \cdot \frac{7}{6xy} = \frac{35xx}{24yy}$ | $\frac{6xx}{5} \cdot \frac{7}{6xy} = \frac{7x}{5y}$

$\frac{7xy}{6} \cdot \frac{7}{6xy} = \frac{49}{36}$ | $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}yy}{8} \cdot \frac{7}{\underset{2}{\cancel{6}}xy} = \frac{21y}{16x}$;

c) $\frac{5xxx}{\underset{2}{\cancel{4}}y} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{5xx} = \frac{3x}{2y}$ | $\frac{6xx}{5} \cdot \frac{6}{5xx} = \frac{36}{25}$

$\frac{7xy}{6} \cdot \frac{6}{5xx} = \frac{7y}{5x}$ | $\frac{9yy}{\underset{4}{\cancel{8}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{5xx} = \frac{27yy}{20xx}$;

d) $\frac{5xxx}{4y} \cdot \frac{5y}{4xxx} = \frac{25}{16}$ | $\frac{\overset{3}{\cancel{6}}xx}{5} \cdot \frac{5y}{\underset{2}{\cancel{4}}xxx} = \frac{3y}{2x}$

$\frac{7xy}{6} \cdot \frac{5y}{4xxx} = \frac{35yy}{24xx}$ | $\frac{9yy}{8} \cdot \frac{5y}{4xxx} = \frac{45yyy}{32xxx}$

e) $-\frac{27}{20} + \frac{35}{24} = -\frac{162}{120} + \frac{175}{120} = \frac{13}{120}$;

$-\frac{21}{16} - \frac{7}{5} - \frac{3}{2} = -\frac{105}{80} - \frac{112}{80} - \frac{80}{120} = -\frac{337}{80}$;

$\frac{81}{64} - \frac{49}{36} + \frac{36}{25} - \frac{25}{16} = \frac{18225}{14400} - \frac{19600}{14400} + \frac{20736}{14400} - \frac{22500}{14400} = -\frac{3139}{14400}$.

5) $$\frac{\frac{(n-2)a^2}{6}-\frac{(n+5)a}{8}+\frac{n-9}{10}}{\frac{(n+2)a}{3}+\frac{n-5}{5}-\frac{n+9}{8a}}$$

$$\frac{\frac{(n^2-4)a^5}{18}-\frac{(n^2+7n+10)a^4}{24}+\frac{(n^2-7n-18)a^3}{30}+\frac{(n^2-7n+10)a^2}{30}-\frac{(n^2-25)a}{40}+\frac{n^2-14n+45}{50}-\frac{(n^2+7n-18)a}{48}+\frac{n^2+14n+45}{64}-\frac{n^2-81}{80a}}{\frac{(n^2-4)a^5}{18}-\frac{(n^2+63n+10)a^4}{120}-\frac{(3n^2+91n-96)a^3}{240}+\frac{57n^2-98n-2565}{1600}-\frac{n^2-81}{80a}}$$

Nebenrechnung.

a) $\frac{(n-2)aa}{6}\cdot\frac{(n+2)a}{3}=\frac{(nn-4)aaa}{18}$ u. s. w.

$$\begin{array}{r} n-2 \\ n+2 \\ \hline nn-2n \\ +2n-4 \\ \hline nn\quad -4 \end{array}\qquad \begin{array}{r} n+5 \\ n+2 \\ \hline nn+5n \\ +2n+10 \\ \hline nn+7n+10 \end{array}\qquad \begin{array}{r} n-9 \\ n+2 \\ \hline nn-9n \\ +2n-18 \\ \hline nn-7n-18 \end{array}$$

5

b) $\begin{array}{r} n-2 \\ n-5 \\ \hline nn-2n \\ -5n+10 \\ \hline nn-7n+10 \end{array}$ $\begin{array}{r} n+5 \\ n-5 \\ \hline nn+5n \\ -5n-25 \\ \hline nn\quad -25 \end{array}$ $\begin{array}{r} n-9 \\ n-5 \\ \hline nn-9n \\ -5n+45 \\ \hline nn-14n+45 \end{array}$

c) $\begin{array}{r} n-2 \\ n+9 \\ \hline nn-2n \\ +9n-18 \\ \hline nn+7n-18 \end{array}$ $\begin{array}{r} n+5 \\ n+9 \\ \hline nn+5n \\ +9n+45 \\ \hline nn+14n+45 \end{array}$ $\begin{array}{r} n-9 \\ n+9 \\ \hline nn-9n \\ +9n-81 \\ \hline nn\quad -81 \end{array}$

d) $-\frac{n^2+7n+10}{24}+\frac{n^2-7n+10}{30}=-\frac{5n^2+35n+50}{120}+$

$\frac{4n^2-28n+40}{120}=-\frac{n^2+63n+10}{120}$;

$\left|\begin{array}{r} 5n^2+35n+50 \\ :\ 4n^2-28n+40 \\ \hline (-)\quad (+)\quad (-) \\ -(n^2+63n+10) \end{array}\right|$:

$\frac{n^2-7n-18}{30}-\frac{n^2-25}{40}-\frac{n^2+7n-18}{48}=\frac{8n^2-56n-144}{240}$

$-\frac{6n^2-150}{240}-\frac{5n^2+35n-90}{240}=-\frac{3n^2+91n-96}{240}$;

$\left|\begin{array}{r} 8n^2-56n-144 \qquad 5n^2+35n-90 \\ :\ 6n^2\qquad -150 \qquad 2n^2-56n+6 \\ \hline (-)\qquad\quad (+) \qquad (-)\quad (+)\quad (-) \\ 2n^2-56n+6 \qquad -(3n^2+91n-96) \end{array}\right|$:

$\frac{n^2-14n+45}{50}+\frac{n^2+14n+45}{64}=\frac{32n^2-448n+1440}{1600}$

$+\frac{25n^2+350n+1125}{1600}=\frac{57n^2-98n+2565}{1600}$.

6) Es ſei im vorigen Beiſpiele $n=7$, $a=1$, ſo iſt

1) $\frac{7-2}{6}-\frac{7+5}{8}+\frac{7-9}{10}=\frac{5}{6}-\frac{3}{2}-\frac{1}{5}=\frac{25-45-6}{30}$

$=-\frac{26}{30}=-\frac{13}{15}$;

2) $\frac{7+2}{3}+\frac{7-5}{5}-\frac{7+9}{8}=3+\frac{2}{5}-2=1\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$;

3) $-\frac{13}{15}\cdot\frac{7}{5}=-\frac{91}{75}$ (I. Resultat).

4) $\frac{49-4}{18}-\frac{49+441+10}{120}-\frac{147+637-96}{240}+$
$\frac{2793-686+2565}{1600}-\frac{49-81}{80}=\frac{45}{18}-\frac{500}{120}-\frac{688}{240}+\frac{4672}{1600}$
$+\frac{32}{80}=\frac{5}{2}-\frac{25}{6}-\frac{43}{15}+\frac{73}{25}+\frac{2}{5}=\frac{375-625-430+438+60}{150}$
$=-\frac{182}{150}=-\frac{91}{75}$ (II. Resultat).

§. 38.

Division von Aggregaten durch Aggregate.

Wenn ein Aggregat durch ein zweites dividirt werden soll, so setzt das voraus, daß das erstere durch Multiplikation des letztern mit einem dritten Aggregate entstanden sei. Daraus nun folgt:

1) Das Dividend-Aggregat muß ein Glied enthalten, welches das reine Produkt aus dem ersten Gliede des Divisor-Aggregates und dem ersten Gliede des gesuchten dritten oder Quotient-Aggregates ist: wir haben ja bei der Multiplikation mit allen drei Arten der Aggregate gesehen, daß das Produkt aus den beiden ersten Gliedern der Faktoren unverändert, d. h. ohne daß ein anderes Glied dazu summirt würde, in das Gesammt-Produkt aufgenommen wird. Wenn nun zudem richtig geordnet ist, nemlich die Glieder des Dividends noch in der Ordnung sind, wie sie aus der Multiplikation hervorgegangen, so ist jenes Glied immer das erste des Dividends. Unter dieser Voraussetzung findet man also das erste Glied des Quotienten, wenn man das erste Glied des Dividends durch das erste des Divisors dividirt.

Was dieß „richtig geordnet sein" betrifft, wird bemerkt:

a) Bei den Aggregaten der ersten Art kommt es hierauf im Grunde wenig an, weil hier die Einzel-Produkte alle unverändert im Gesammtprodukte stehen; jedoch muß, damit nach der eben gegebenen Regel ein Glied des Quotienten gefunden werden könne, ein solches Glied des Dividends vorangestellt oder auch nur vorangedacht werden, in welchem wirklich das erste Glied des Divisors als Faktor enthalten ist;

b) die Aggregate der zweiten und dritten Art aber werden geordnet, indem man bei den erstern die Glieder des Dividends nach den Buchstaben-Faktoren des Divisors, bei den symmetrischen aber sowohl Dividend als Divisor so ordnet, daß in den Gliedern beider dieselben Buchstaben-Faktoren gleichmäßig zu- oder gleichmäßig abnehmen.

2) Bei der vorausgesetzten Multiplikation sind alle Glieder des gegebenen Faktors (Divisors) zuerst mit dem ersten Gliede des gesuchten (des Quotienten) multiplizirt worden, und dann erst mit dem zweiten. Um also auf dieses zweite Glied des Quotienten zu kommen, müssen zuvor alle jene Produkte, welche durch Multiplikation der Glieder des Divisors mit dem ersten Gliede des Quotienten entstehen, aus dem Dividende hinweggeschafft, d. h. von demselben subtrahirt werden. Ist das geschehen, so ist, die richtige Ordnung wieder vorausgesetzt, von dem sich ergebenden Reste des Dividends das erste, bei den Aggregaten der ersten Art jedenfalls irgend ein Glied dasjenige, welches durch Multiplikation des ersten Gliedes des Divisors mit dem zweiten des Quotienten entstanden ist. Man findet also dieses zweite Glied des Quotienten, indem man jenes nun erste Glied des Dividends durch das erste des Divisors dividirt.

3) Um von dem zweiten Gliede des Quotienten auf ein drittes, von diesem auf ein viertes u. s. w. zu kommen, haben wir nach den nämlichen Schlußfolgerungen zu verfahren, nach welchen wir eben nach dem ersten Gliede das zweite hergestellt haben. Bei der sich hiebei ergebenden fortgesetzten Subtraktion der Produkte, welche durch Multiplikation der nacheinander gefundenen Glieder des Quotienten mit denen des Divisors entstehen, vom Dividende, wird entweder irgend einmal der Rest des Dividends $= 0$, oder er wird es nicht.

Ist das erstere der Fall, so hat man, da gemäß „$\frac{0}{a} = 0$", ein weiteres Glied des Quotienten nicht vorhanden, den gesuchten Quotienten nun vollständig gefunden, und zugleich liegt der Beweis dafür, daß derselbe auch der richtige ist, eben darin, daß jener Rest $= 0$. Denn indem sich die Differenz zwischen dem Dividende und dem Produkte aus den Gliedern des Quotienten in die des Divisors damit als $= 0$ herausstellt, ist dargethan, daß dieses Produkt gleich dem Dividende, und somit umgekehrt der Quotient aus dem gegebenen Dividende und Divisor in der That der gefundene ist.

Wird aber jener Rest nie $= 0$, so ist entweder der gefundene Quotient nicht der richtige, oder dieser kann überhaupt nie vollständig gefunden werden. Der erstere Fall könnte Statt haben, wenn der Dividend nicht richtig geordnet gewesen und die Division doch nach den gegebenen Regeln gemacht worden wäre, was eben fehlerhaft wäre; der zweite Fall aber muß eintreten, wenn der Dividend nicht wirklich den Divisor als Faktor enthält, welcher Fall strenge genommen nach unsern Begriffen von Division keinen Sinn hat, aber wie der gleiche in §. 26 behandelte nicht zurückzuweisen ist, indem auch er auf eine wichtige mathematische Größe, die unendliche Reihe, führt.

Fassen wir die hiemit abgeleiteten Regeln kurz zusammen, so hat man, die richtige Ordnung des Dividends vorausgesetzt, folgendes Verfahren zu beobachten:

1) Man dividire das erste Glied des Dividends durch das erste des Divisors, wodurch man das erste Glied des Quotienten erhält;

2) mit diesem letztern multiplizire man den ganzen Divisor,

3) und subtrahire die dadurch erhaltenen Produkte vom Dividende.

4) Verfährt man mit dem dadurch erhaltenen Reste des Dividends, wie zuerst mit dem ganzen Dividende selbst, so erhält man zunächst das zweite Glied des Quotienten und hierauf wieder einen zweiten Rest des Dividends, aus welchem durch dasselbe Verfahren wieder ein drittes Glied des Quotienten u. s. w. gefunden wird.

Beispiele:

1) $(gh^2l + bcm - cgh + \overset{(I)}{bc^2} - ghm - bchl - cm - m^2 + hlm)$
$: (bc - gh - m) = c + m - hl$

$- cgh + bc^2 \quad - cm$
$(+) \quad (-) \quad (+)$

$gh^2l + \overset{(I)}{bcm} \quad - ghm - bchl \quad - m^2 + hlm$
$+ bcm \quad - ghm \quad - m^2$
$(-) \quad (+) \quad (+)$

$gh^2l \quad \overset{(I)}{-} bchl \quad + hlm$
$+ gh^2l \quad - bchl \quad + hlm$
$(-) \quad (+) \quad (-)$

0

Anmerkung. Man sieht aus diesem Beispiele, daß man bei Aggregaten der ersten Art die Division richtig durchführen kann, ohne daß der Dividend richtig geordnet ist, wenn nur bei der je-

weiligen Division immer diejenigen Glieder (sie sind oben mit (I) bezeichnet) des Dividends gewählt werden, welche wirklich durch Multiplikation mit dem ersten Gliede des Divisors entstanden sind. Besser aber ist es jedenfalls, schon vor der Division die Glieder des Dividends nach denen des Divisors zu ordnen, also in unserm Beispiele das gegebene Aggregat in das folgende umzuändern:

$$bc^2 - bchl + bcm - bgh + gh^2l - ghm - cm + hlm - m^2$$
$$: (bc - gh - m) = c - hl + m$$

$$\begin{array}{l} bc^2 \quad - cgh \quad - cm \\ (-) \quad (+) \quad (+) \\ \hline *)\ -bchl \\ \quad -bchl \quad + gh^2l \quad + hlm \\ \quad (+) \quad (-) \quad (-) \\ \hline \quad + bcm \\ \quad + bcm \quad - ghm \quad - m^2 \\ \quad (-) \quad (+) \quad (+) \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

2) $63x^2 - 101xy + 96xz + 40y^2 - 89yz - 39z^2$
$: (7x - 5y + 13z) = 9x - 8y - 3z$

$$\begin{array}{l} 63x^2 - 45xy + 117xz \\ (-) \quad (+) \quad (-) \\ \hline \quad -56xy - 21xz \\ \quad -56xy \quad + 40y^2 - 104yz \\ \quad (+) \quad (-) \quad (+) \\ \hline \quad -21xz \quad + 15yz - 39z^2 \\ \quad (+) \quad (-) \quad (+) \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

3) $6x - 27x^3 + 35x^4 + 40 - 99x^2$
$: (3x - 5 + 7x^2) =$
$= 35x^4 - 27x^3 - 99x^2 + 6x + 40$
$: (7x^2 + 3x - 5)$ oder $=$
$= 40 + 6x - 99x^2 - 27x^3 + 35x^4$
$: (-5 + 3x + 7x^2) = -8 - 6x + 5x^2$

$$\begin{array}{l} 40 - 24x - 56x^2 \\ (-) \quad (+) \quad (+) \\ \hline \quad 30x - 43x^2 \end{array}$$

*) Man ist gewohnt, aus dem Dividende nur dasjenige Glied des Restes an der dem Reste zukommenden Stelle anzusetzen, welches jedesmal zur Division kömmt, die übrigen aber im ursprünglichen Dividende stehen zu lassen, wenn nicht durch Summation wie in den folgenden Beispielen Aenderungen an denselben vorgehen.

$$30x - 18x^3 - 42x^5$$
$$(-)\quad (+)\quad\quad (+)$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$-25x^2 + 15x^3$$
$$-25x^2 + 15x^3 + 35x^4$$
$$(+)\quad\quad (-)\quad\quad (-)$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$0$$

4) $\frac{4a^3}{9b^2} - \frac{a^2}{b} + \frac{391a}{240} - \frac{6b}{5} + \frac{16b^2}{25a}$

$$:\left(\frac{2a^2}{3b} - \frac{3a}{4} + \frac{4b}{5}\right) = \underline{\frac{2a}{3b} - \frac{3}{4} + \frac{4b}{5a}}$$

$$\frac{4a^3}{9b^2} - \frac{a^2}{2b} + \frac{8a}{15}$$
$$(-)\quad (+)\quad (-)$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$-\frac{a^2}{2b} + \frac{263a}{240}$$
$$-\frac{a^2}{2b} + \frac{9a}{16} - \frac{3b}{5}$$
$$(+)\quad (-)\quad (+)$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$+\frac{8a}{15} - \frac{3b}{5}$$
$$+\frac{8a}{15} - \frac{3b}{5} + \frac{16b^2}{25a}$$
$$(-)\quad (+)\quad (-)$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$0$$

Nebenrechnung:

a) $\frac{4aaa}{9bb} : \frac{2aa}{3b} = \frac{2a}{3b}$; $\frac{2aa}{3b} \cdot \frac{2a}{3b} = \frac{4aaa}{9bb}$; $\frac{3a}{4} \cdot \frac{2a}{3b} = \frac{aa}{2b}$;

$\frac{4b}{5} \cdot \frac{2a}{3b} = \frac{8a}{15}$; $-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$; $\frac{391}{240} - \frac{8}{15} =$

$= \frac{391}{240} - \frac{128}{240} = \frac{263}{240}$.

b) $\frac{aa}{2b} : \frac{2aa}{3b} = \frac{3}{4}$; $\frac{2aa}{3b} \cdot \frac{3}{4} = \frac{aa}{2b}$; $\frac{3a}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9a}{16}$;

$\frac{4b}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3b}{5}$; $\frac{263}{240} - \frac{9}{16} = \frac{263}{140} - \frac{135}{240} = \frac{128}{240} = \frac{8}{15}$.

c) $\frac{8a}{15} : \frac{2aa}{3b} = \frac{4b}{5a}$; $\frac{2aa}{3b} \cdot \frac{4b}{5a} = \frac{8a}{15}$; $\frac{3a}{4} \cdot \frac{4b}{5a} = \frac{3b}{5}$;

$\frac{4b}{5} \cdot \frac{4b}{5a} = \frac{16bb}{25a}$.

5) $(n^2 - n)\,a^2 + (2n + 1)\,ab + 2ac - (n^2 + 3n + 2)\,b^2 + + (2n^2 - 2n - 7)\,bc - (n^2 - 5n + 6)\,c^2$

$: ((n - 1)\,a + (n + 2)\,b - (n - 3)\,c) = na - (n+1)b + (n - 2)\,c$

$(n^2 - n)\,a^2 + (n^2 + 2n)\,ab - (n^2 - 3n)\,ac$
$(-)\qquad (-)\qquad (+)$
$-(n^2 - 1)\,ab + (n^2 - 3n + 2)\,ac$
$-(n^2 - 1)\,ab \quad -(n^2 + 3n + 2)\,b^2 + (n^2 - 2n - 3)\,bc$
$(+)\qquad (+)\qquad (-)$
$+(n^2 - 3n + 2)\,ac + (n^2 - 4)\,bc$
$+(n^2 - 3n + 2)\,ac + (n^2 - 4)\,bc - (n^2 - 5n + 6)\,c$
$(-)\qquad (-)\qquad (+)$
0

Nebenrechnung.

a) $n^2 - n$
$: (n - 1) = n$
$n^2 - n$
$(-)\ (+)$
0

$n - 1 \qquad n + 2 \qquad n - 3 \qquad n^2 + 2n$
$2n + 1$
$(-)\quad (-)$
$n \qquad n \qquad n \qquad n^2 \qquad -1$
$n^2 - n \qquad n^2 + 2n \qquad n^2 - 3n \qquad n^2 \qquad -1$

b) $n^2 - 1$
$: (n - 1) = n + 1$
$n^2 - n$
$(-)\ (+)$
$+n$
$n - 1$
$(-)\ (+)$
0

$n - 1 \qquad n + 2 \qquad n - 3 \qquad 2n^2 - 2n - 7$
$n + 1 \qquad n + 1 \qquad n + 1 \qquad n^2 - 2n - 3$
$(-)\ (+)\ (+)$
$n^2 - n \qquad n^2 + 2n \qquad n^2 - 3n \qquad n^2 \qquad -4$
$+n - 1 \qquad +n + 2 \qquad +n - 3$
$n^2 - 1 \qquad n^2 + 3n + 2 \qquad n^2 - 2n - 3$

c) $n^2 - 3n + 2$
$: (n - 1) = n - 2$
$n^2 - n$
$(-)\quad (+)$
$-2n$
$-2n + 2$
$(+)\quad (-)$
0

$$\begin{array}{l|l|l} n-1 & n+2 & n-3 \\ n-2 & n-2 & n-2 \\ \hline n^2-n & n^2+2n & n^2-3n \\ \quad -2n+2 & \quad -2n-4 & \quad -2n+6 \\ \hline n^2-3n+2 & n^2-4 & n^2-5n+6 \end{array}$$

6) $$\frac{n^2a^2}{16} - \frac{(5n^2-5n)\,a}{96} - \frac{9n^2+6n+2}{48} - \frac{5n^2+21n-26}{144a} + \frac{n^2-4}{24a^2}$$

$$: \left(\frac{na^2}{8} - \frac{(n-1)a}{6} - \frac{n+2}{4}\right) = \frac{n}{2} + \frac{n-1}{4a} - \frac{n-2}{6a^2}$$

7) $$\frac{a^3+b^3}{a+b} =$$

$$\begin{array}{l} a^3+b^3 \\ : (a+b) = a^2-ab+b^2 \\ \hline a^3+a^2b \\ (-)\ (-) \\ \hline -a^2b \\ -a^2b-ab^2 \\ (+)\ (+) \\ \hline +ab^2 \\ +ab^2+b^3 \\ (-)\ \ (-) \\ \hline 0 \end{array}$$

8) $$\frac{a^4-b^4}{a-b} =$$

$$\begin{array}{l} a^4-b^4 \\ : (a-b) = a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ \hline a^4-a^3b \\ (-)\ (+) \\ \hline +a^3b \\ +a^3b-a^2b^2 \\ (-)\ \ (+) \\ \hline +a^2b^2 \\ +a^2b^2-ab^3 \\ (-)\ \ (+) \\ \hline +ab^3 \\ +ab^3-b^4 \\ (-)\ \ (+) \\ \hline 0 \end{array}$$

9) $$\frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + \ldots.$$

Setzt man hier $a = 1$ und $x = 1$, so ist:

$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, d. h. $\frac{1}{2}$ ist in eine unendliche Reihe verwandelt, deren Werth immer zwischen 1 und 0 schwankt, je nachdem man die Summation derselben bei einem positiven oder bei einem negativen Gliede schließt, wie denn in der That $\frac{1}{2}$ zwischen 1 und 0 mitten inne steht.

10) $\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + \ldots$

Setzt man hier $x = 1$, so ist:

$\frac{a}{1-1} = \frac{a}{0} = a + a + a + a + \ldots$, d. h. der Quotient $\frac{a}{0}$, von dem wir in §. 30 gesagt haben, daß er nach den Begriffen der Division keinen Sinn habe, stellt sich hier, wohl zu bemerken, in Folge einer Division, die ebenfalls keinen rechten Sinn hat, indem $1 - x$ offenbar kein Faktor von a ist, als eine Summe von unendlich vielen gleichen Summanden und somit als eine unendlich (endlos) große Zahl heraus, welche freilich selbst wieder keine bestimmte (endlich abgegränzte) ist, so daß zwischen dem, was in §. 30 über den Quotienten $\frac{a}{0}$ ausgesprochen, und dem, was hier hinsichtlich seines Werthes aufgefunden worden ist, kein eigentlicher Widerspruch besteht.

§. 39.

Einen wichtigen Anhang zur Division bildet die Lehre von der Zerlegung der Aggregate. Während nämlich in der Division aus dem Produkte vermittelst des einen Faktors der andere, wird durch Zerlegung bei gewissen Arten von Aggregaten aus dem Produkte unmittelbar sowohl der eine als der andere Faktor gefunden. Solcher zerlegbaren Aggregate unterscheiden wir drei Klassen, nämlich:

1) diejenigen, welche durch Multiplikation irgend eines Aggregates mit einer Zahl entstanden sind; man erkennt sie daran, daß alle ihre Glieder einen gemeinschaftlichen Faktor enthalten. Die Zerlegung wird hiebei einfach durch Summation der Glieder des Aggregates nach §. 33 Regel 1) und 2) bewerkstelligt, z. B.

1) $15ad - 21bd + 3df - 18dg = 3d(5a - 7b + f - 6g)$;

2) $\frac{ax}{h} - \frac{(c-d)xy}{bh} + \frac{4x}{h} = \left(a - \frac{(c-d)y}{b} + 4\right) \cdot \frac{x}{h}$.

2) Die zweite Klasse der zerlegbaren Aggregate bilden diejenigen, welche durch Multiplikation zweier Aggregate der ersten Art (s. §. 37) entstanden sind. Man erkennt sie daran, daß ihre Glieder paarweise, oder zu dreien, vieren ꝛc. einen gemeinschaftlichen Faktor haben. Ihre Zerlegung in Faktoren geschieht ebenfalls durch Summation nach §. 33 Regel 1), nur muß selbe wiederholt werden. Z. B.

1) $blmf - bcfx + 3lmy - 3cxy =$
$= bf(lm - cx) + 3y(lm - cx) =$
$= (bf + 3y)(lm - cx);$

2) $9ad - 21bd - 12cd - 15af + 35bf + 20cf =$
$= 3d(3a - 7b - 4c) - 5f(3a - 7b - 4c) =$
$= (3d - 5f)(3a - 7b - 4c)$

oder $9ad - 15af - 21bd + 35bf - 12cd + 20cf =$
$= 3a(3d - 5f) - 7b(3d - 5f) - 4c(3d - 5f) =$
$= (3a - 7b - 4c)(3d - 5f).$

3) Die dritte Klasse zerlegbarer Aggregate entsteht durch Multiplikation zweier Aggregate der zweiten oder der dritten Art (s. ebenfalls §. 37); jedoch beschränkt man sich hier auf die Zerlegung der dreigliedrigen durch Multiplikation aus zwei je zweigliedrigen entstandenen Aggregate, obgleich wenigstens bei denen der zweiten Art auch die Zerlegung mehrgliedriger möglich wäre.

Solche Aggregate erkennt man im Allgemeinen daraus, daß das erste und letzte Glied den etwaigen Buchstabenfaktor immer gedoppelt enthält; im Besondern aber unterscheiden sich die Aggregate, je nachdem sie

a) aus zwei Summen,
b) aus zwei Differenzen,
c) aus einer Summe mit einer Differenz entstanden sind.

Was aber die Produkte, je nachdem sie von den einen oder den andern Faktoren gebildet sind, theils Gemeinsames theils Unterschiedenes haben, sehen wir an den folgenden Paradigmen:

a)
$$\begin{array}{r} mx + ny \\ px + qy \\ \hline mpx^2 + npxy \\ + mqxy + nqy^2 \\ \hline mpx^2 + (np + mq)xy + nqy^2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{r} mx - ny \\ px - qy \\ \hline mpx^2 - npxy \\ \quad - mqxy + nqy^2 \\ \hline mpx^2 - (np + mq)\,xy + nqy^2 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{r} mx - ny \\ px + qy \\ \hline mpx^2 - npxy \\ \quad + mqxy - nqy^2 \\ \hline mpx^2 - (np - mq)\,xy - nqy^2 \end{array}$$

oder auch $mpx^2 + (mq - np)\,xy - nqy^2$, je nachdem nämlich $np > mq$ oder umgekehrt $mq > np$.

Daraus nun geht hervor:

1) Im ersten Falle sind alle Glieder des Produktes positiv, im zweiten das mittlere, im dritten das letzte Glied negativ, während zugleich im dritten Falle das mittlere Glied je nach den Umständen positiv oder negativ sein kann;

2) in allen Fällen steht der Buchstabenfaktor, den die beiden ersten Glieder der Faktoren enthalten, doppelt im ersten, der, welchen die beiden zweiten Glieder enthalten, doppelt im letzten Gliede des Produktes;

3) ebenfalls in allen Fällen entsteht der Coëffizient des ersten Gliedes des Produktes durch Multiplikation aus den Coëffizienten der beiden ersten Glieder der Faktoren, eben so der des letzten Gliedes aus den Coëffizienten der beiden zweiten;

4) endlich ist der Coëffizient des mittlern Gliedes im ersten und zweiten Falle die Summe, im dritten aber die Differenz der Produkte, welche entstehen, wenn man je einen der Coëffizienten in den beiden ersten Gliedern mit dem Coëffizienten des zweiten Gliedes im andern Faktor, oder wie man kürzer sagt, wenn man diese Coëffizienten kreuzweise multiplizirt, nämlich $\begin{array}{cc} m & n \\ p & q \end{array}$

$$\begin{array}{r} \times \\ \hline np \pm mq \end{array}$$

Anmerkung. Der Umstand, daß im dritten Falle der Coëffizient des mittlern Gliedes eine Differenz ist, macht es möglich, daß selber $= 0$ wird, und so das mittlere Glied verschwindet.

Diese nämlichen vier Beobachtungen benützt man nun umge-

kehrt dazu, aus dem Produkte auf die beiden Faktoren zu schließen und diese demgemäß herzustellen, nemlich:

1) a) Sind die drei Glieder des Produktes positiv, so sind beide Faktoren Summen;

b) ist das mittlere Glied allein negativ, so sind beide Faktoren Differenzen;

c) ist aber das letzte Glied negativ, wobei das mittlere positiv oder negativ sein mag, so ist der eine Faktor eine Summe, der andere eine Differenz. Man setzt hiernach an:

entweder a) $\cdot + \cdot$ oder b) $\cdot - \cdot$ oder c) $\cdot + \cdot$

$\cdot + \cdot$ $\cdot - \cdot$ $\cdot - \cdot$

2) Den Buchstabenfaktor, welchen das erste Glied des Produktes doppelt enthält, gibt man den ersten Gliedern der beiden Faktoren, den aber, welchen das letzte doppelt enthält, den zweiten Gliedern derselben je einfach, so daß man Beispielsweise nun hat:

$\cdot a + \cdot b$ oder $\cdot x - \cdot$ oder etwa $\cdot + \cdot y$

$\cdot a - \cdot b$ $\cdot x - \cdot$ $\cdot + \cdot y$

3) Die noch fehlenden Coëffizienten der beiden ersten und der beiden zweiten Glieder ermittelt man aus den Coëffizienten des ersten und des letzten Gliedes des gegebenen Aggregates: man zerlegt nemlich diese letztern je in zwei Faktoren, und setzt nun an die Stelle der oben noch belassenen Punkte ein Paar solcher Faktoren des ersten Coëffizienten in den beiden ersten, ein Paar der Faktoren des letzten Coëffizienten in den beiden zweiten Gliedern der gesuchten Faktoren, so daß man in unserm allgemeinen Beispiele, etwa den Fall b) gesetzt, hätte:

$$mx - ny$$
$$px - qy$$

4) Um nun zu wissen, ob die gewählten Faktoren auch die richtigen Coëffizienten unserer Glieder seien, multiplizirен wir sie, wie oben gezeigt, kreuzweise, und untersuchen nun, ob im Falle a) und b) die Summe, im Falle c) die Differenz der erhaltenen Produkte mit dem Coëffizienten des mittlern Gliedes des Aggregates übereinstimme oder nicht, wobei im Falle c) auch noch das Zeichen dieses Coëffizienten zu berücksichtigen ist. Ist die Uebereinstimmung vorhanden, so sind die gewählten Coëffizienten die richtigen und somit die beiden gesuchten Faktoren jetzt vollständig bekannt; — ist aber das nicht der Fall, so müssen eben aus den

resp. Faktoren-Paaren andere gewählt und dieser Versuch so lange wiederholt werden, bis die rechten Coëffizienten gefunden sind.

Beispiele der Zerlegung solcher Aggregate finden sich in den folgenden gemischten Aufgaben:

1) $$\frac{24a^2 - 14ab - 5b^2}{36a^3 - 27a^2b} \times \frac{48a^2 - 27b^2}{12a^2 + 11ab + 2b^2} =$$

$$= \frac{(4a + b)(6a - 5b)}{9a^2(4a - 3b)} \times \frac{3(4a + 3b)(4a - 3b)}{(3a + 2b)(4a + b)}$$

$$= \frac{(6a - 5b)(4a + 3b)}{3a^2(3a + 2b)} = \frac{24a^2 - 2ab - 15b^2}{9a^3 + 6a^2b}$$

Zerlegungen.

a) $24a^2 - 14ab - 5b^2 = (4a + b)(6a - 5b)$;

$24 = 1 \cdot 24$
$= 2 \cdot 12$
$= 3 \cdot 6$
$= 4 \cdot 6$

$5 = 1 \cdot 5$

$4a + b$
$6a - 5b$
$+ 6ab$
$- 20ab$
$- 14ab$

b) $36a^3 - 27a^2 = 9a^2(4a - 3b)$;

c) $48a^2 - 27b^2 = 3(16a^2 - 9b^2) = 3(4a + 3b)(4a - 3b)$;

$16 = 2 \cdot 8$
$= 4 \cdot 4$

$9 = 3 \cdot 3$

$4a + 3b$
$4a - 3b$
$+ 12ab$
$- 12ab$
0

d) $12a^2 + 11ab + 2b^2 = (3a + 2b)(4a + b)$

$12 = 2 \cdot 6$
$= 3 \cdot 4$

$2 = 1 \cdot 2$

$3a + 2b$
$4a + b$
$+ 8ab$
$+ 3ab$
$+ 11ab$

2) $$\frac{12x^2 + 5xy - 72y^2}{48x^2 - 172xy + 150y^2} : \frac{24x^2 - 54xy - 20xz + 45yz}{192x^2 - 328xy - 150y^2} =$$

$$= \frac{(3x + 8y)(4x - 9y)}{2(2x - 3y)(12x - 25y)} : \frac{(6x - 5z)(4x - 9y)}{2(8x + 3y)(12x - 25y)}$$

$$= \frac{(3x + 8y)(8x + 3y)}{(2x - 3y)(6x - 5z)} = \frac{24x^2 + 73xy + 24y^2}{12x^2 - 18xy - 10xz + 15yz}.$$

Zerlegungen:

a) $12x^2 + 5xy - 72y^2 = (3x + 8y)(4x - 9y)$;

$12 = 2 \cdot 6$	$72 = 2 \cdot 36$	$3x + 8y$
$= 3 \cdot 4$	$= 3 \cdot 24$	$4x - 9y$
	$= 4 \cdot 18$	$+ 32xy$
	$= 6 \cdot 12$	$- 27xy$
	$= 8 \cdot 9$	$+ 5xy$

b) $48x^2 - 172xy + 150y^2 = 2(24x^2 - 86xy + 75y^2) =$
$2(2x - 3y)(12x - 25y)$;

$24 = 2 \cdot 12$	$75 = 3 \cdot 25$
$= 3 \cdot 8$	$= 5 \cdot 15$
$= 4 \cdot 6$	

$4x - 15y$	$3x - 5y$	$2x - 3y$
$6z - 5y$	$8x - 15y$	$12x - 25y$
$- 90xy$	$- 40xy$	$- 36xy$
$- 20xy$	$- 45xy$	$- 50xy$
$- 110xy$ (unrichtig)	$- 85xy$ (wieder unrichtig)	$- 86xy$ (richtig)

c) $24x^2 - 54xy - 20xz + 45yz = 6x(4x - 9y) - 5z(4x - 9y) =$
$= (6x - 5z)(4x - 9y)$.

d) $192x^2 - 328xy - 150y^2 = 2(96x^2 - 164xy - 75y^2) =$
$= 2(8x + 3y)(12x - 25y)$.

$96 = 2 \cdot 48$	$75 = 3 \cdot 25$	$8x + 3y$
$= 3 \cdot 32$	$= 5 \cdot 15$	$12x - 25y$
$= 4 \cdot 24$		$+ 36xy$
$= 6 \cdot 16$		$- 200xy$
$= 8 \cdot 12$		$- 164xy$

Man mag in solchen Beispielen zur Probe an die Stelle der Buchstabenzahlen in der Aufgabe und im Resultate Zifferzahlen setzen, z. B.

$$x = 1,\ y = -1,\ z = -1.$$

a) $$\frac{12 \cdot 1 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \cdot (-1) - 72 \cdot (-1) \cdot (-1)}{48 \cdot 1 \cdot 1 - 172 \cdot 1 \cdot (-1) + 150 \cdot (-1) \cdot (-1}} :$$
$$: \frac{24 \cdot 1 \cdot 1 - 54 \cdot 1 \cdot (-1) - 20 \cdot 1 \cdot (-1) + 45 \cdot (-1) \cdot (-1)}{192 \cdot 1 \cdot 1 - 328 \cdot 1 \cdot (-1) - 150 \cdot (-1) \cdot (-1)}$$
$$= \frac{12 - 5 - 72}{48 + 172 + 150} : \frac{24 + 54 + 20 + 45}{192 + 328 - 150} = \frac{-65}{370} : \frac{143}{370} =$$
$$= -\frac{65}{143} = -\frac{5}{11} \text{ (Resultat I.)}$$

$$\beta)\quad \frac{24\,.\,1\,.\,1+73\,.\,1\,.\,(-1)+24\,.\,(-1)\,.\,(-1)}{12\,.\,1\,.\,1-18\,.\,1\,.\,(-1)-10\,.\,1\,.\,(-1)+15\,.\,(-1)\,.\,(-1)}$$

$$=\frac{24-73+24}{12+18+10+15}=\frac{-25}{55}=-\frac{5}{11}\quad\text{(Resultat II.)}$$

3) $$\frac{3x-4}{6x^2-7x+2}-\frac{4x+3}{9x^2-12x+4}+\frac{5x-2}{4x^2-1}=$$

$$=\frac{3x-4}{(2x-1)(3x-2)}-\frac{4x+3}{(3x-2)(3x-2)}+\frac{5x-2}{(2x+1)\ (2x-1)}=$$

$$\left|\ :\ \frac{(2x-1)(3x-2)}{(2x+1)(2x-1)}\ :\ \right|$$

$$\frac{(3x-2)(3x-2)}{(2x+1)(2x-1)(3x-2)(3x-2)=D.}$$

$$=\frac{(3x-4)(2x+1)(3x-2)}{D}-\frac{(4x+3)(2x+1)(2x-1)}{D}+$$

$$+\frac{(5x-2)(3x-2)(3x-2)}{D}=\frac{47x^3-117x^2+46x+3}{36x^4-48x^3+7x^2+12x-4}.$$

Nebenrechnungen.

1) $3x-4$ mal $2x+1$:

$$6x^2-8x$$
$$+3x-4$$
$$6x^2-5x-4$$
$$3x-2\ -$$
$$18x^3-15x^2-12x$$
$$-12x^2+10x+8$$
$$18x^3-27x^2-2x+8$$

2) $4x+3$ mal $4x^2-1$:

$$16x^3+12x^2-4x-3$$
$$45x^3-18x^2$$
$$-60x^2+24x$$
$$+20x-8$$
$$45x^3-78x^2+44x-8$$

3) $5x-2$ mal $9x^2-12x+4$:

$$45x^3-78x^2+44x-8$$
$$-60x^2+24x$$
$$+20x-8$$
$$45x^3-78x^2+44x-8$$

4) $$18x^3-27x^2-2x+8$$
$$-[16x^3+12x^2-4x-3]$$
$$\underset{(-)}{\ }\ \underset{(-)}{\ }\ \underset{(+)}{\ }\ \underset{(+)}{\ }$$
$$45x^3-78x^2+44x-8$$
$$47x^3-117x^2+46x+3$$

5) $9x^2-12x+4$ mal $4x^2-1$:

$$36x^4-48x^3+16x^2$$
$$-9x2+12x-4$$
$$36x^4-48x^3+7x^2+12x-4$$

Es sei im vorliegenden Beispiele wieder $x = 1$, so haben wir:

α) $$\frac{3-4}{6-7+2} - \frac{4+3}{9-12+4} + \frac{5-2}{4-1} = \frac{-1}{1} - \frac{7}{1} + \frac{3}{3}$$
$$= -1 - 7 + 1 = -7.$$

β) $$\frac{47-117+46+3}{36-48+7+12-4} = \frac{-21}{3} = -7.$$

Vierter Abschnitt.

Potenziren und Radiziren.

§. 40.

Im Vorhergehenden sind uns vielfach Produkte vorgekommen, welche einen und denselben Faktor mehrmals enthielten; ein solches Produkt kennen wir offenbar, sobald wir den gleichen Faktor und die Zahl wissen, welche angibt, wie oft derselbe im Produkte vorkomme. Wird aber ein derartiges Produkt aus diesen beiden Zahlen nun auch wirklich hergestellt (ohne Multiplikation), so werden damit zwei Zahlen zu einer dritten in einer Weise verbunden, welche bisher nicht vorgekommen ist — es ist somit hierin eine neue Rechnungsart gefunden — wir nennen sie Potenziren. Diese neue Verbindung bezeichnen wir dadurch, daß wir die Zahl, welche angibt, wie oft der gleiche Faktor im Produkte vorkomme, rechts über dem gleichen Faktor ansetzen. Der Ausdruck des Potenzirens ist daher:

$$a^m = (a^m),$$

in welchem Ausdrucke der gleiche Faktor a nun Dignand, die Zahl m, welche angibt, wie oft er im Produkte vorkomme, Exponent, das Produkt (a^m) selbst aber Potenz heißt.

Anmerkung 1. Die Potenz (a^m) wird mit „a zur m^{ten}" gelesen.

Anmerkung 2. Das Potenziren geschieht bei Buchstabenzahlen nur formell, indem eben a^m nicht $= c$, sondern $= (a^m)$ gesetzt wird; bei Zifferzahlen müßte, wollte man aus dem Dignand und dem Exponenten unmittelbar die Potenz herstellen, also wirklich potenziren, eine entsprechende Tabelle, ähnlich dem „Einmaleins", auswendig gelernt sein.

Anmerkung 3. Hierher gehört auch die Potenzirung negativer Zahlen, welche nach dem Vorgange der Multiplikation als

einfache Faktoren, nicht mehr als Differenzen betrachtet werden. Es ist nun:

$(-a)^2 = (-a).(-a) = +aa = a^2$,

$(-a)^3 = (-a).(-a).(-a) = -aaa = -a^3$,

$(-a)^4 = (-a).(-a).(-a).(-a) = +aaaa = a^4$,

$(-a)^5 = (-a)(-a)(-a)(-a)(-a) = -aaaaa = -a^5$ u. s. w.,

woraus hervorgeht, daß die geraden Potenzen negativer Zahlen, d. h. diejenigen, deren Exponenten gerade Zahlen sind, positiv, die ungeraden aber negativ sind, während natürlich positive Zahlen nur positive Potenzen geben können, indem, wenn alle Faktoren positiv, das Produkt nur positiv sein kann.

§. 41.

Die materielle Bedeutung des Potenzirens besteht darin, daß hiebei der Dignand durch den Exponenten als Faktor (nicht als Zahl) vervielfältigt wird, indem

$a^m = a.a.a.a.....$ (m mal).

Auf diese materielle Bedeutung muß in allen Fällen zurückgegangen werden, wo Fragen auftauchen, die nicht formell, d. h. aus den Begriffen unmittelbar, sich beantworten lassen. Eine solche bietet sich uns, wenn wir im Hinblicke auf: „$a + b = b + a$" oder: „$a \times b = b \times a$" fragen, ob auch in gegenwärtiger, der Addition und Multiplikation offenbar analogen Rechnungsart $a^b = b^a$ sei. Um diese Frage zu beantworten, lösen wir die Potenzen in Produkte auf und fragen, ob die Produkte

$a.a.a.a.....$ b mal und $b.b.b.b.....$ a mal

einander gleich seien oder nicht.

Hier sind nun zwei Fälle zu unterscheiden:

1) entweder haben a und b keinen gemeinschaftlichen Faktor,

2) oder sie haben einen solchen.

1) Im ersten Falle ist es von vorne herein unmöglich, daß die beiden Produkte einander gleich, d. h. eine und dieselbe Zahl seien; denn, wären sie einander gleich, so müßten sie — indem das Produkt der nothwendige Inbegriff aus allen seinen Faktoren *) ist, d. h. nicht etwa irgend einen Faktor beliebig enthält oder nicht

*) Hier kann natürlich nur von eigentlichen Zahlen, aber noch keineswegs von irrationalen die Rede sein.

enthält (wie man etwa eine und dieselbe Summe bald aus diesen bald aus jenen Summanden zusammensetzt) — in ihre Einzelfaktoren aufgelöst, beiderseits die gleiche Menge der nämlichen Faktoren enthalten, was schon darum unmöglich ist, weil weder irgend ein Faktor von a zugleich in b, noch einer von b in a enthalten ist, und somit umgekehrt a^b in seine Einzelfaktoren aufgelöst eine ganz andere Faktoren-Reihe darbietet, als b^a.

2) Findet der zweite Fall Statt, und ist der gemeinschaftliche Faktor, welchen a und b haben, etwa c, so daß $a = cd$ und $b = ce$, (wobei d und e keinen weitern gemeinschaftlichen Faktor enthalten), so wäre, wenn $a^b = b^a$,

auch cd . cd . cd . . . . b mal = ce . ce . ce . ce . . . . a mal,

oder ccc . . . b mal × ddd . . . b mal = cccc . . . . a mal × eeee . . . . a mal,

daher auch $\frac{ccc \ldots b\,mal \times ddd \ldots b\,mal}{ccc \ldots b\,mal} = \frac{ccc \ldots a\,mal \times eee \ldots a\,mal}{ccc \ldots b\,mal}$

oder ddd . . . b mal = ce . . . (a — b) mal × eee . . . . a mal,

wobei vorausgesetzt wurde, daß $a > b$ sei.

Aber diese beiden Produkte, die nun keinen gemeinschaftlichen Faktor mehr haben, können eben deßwegen auch nicht einander gleich, mithin kann ebenso wenig $a^b = b^a$ sein.

In allen Fällen also ist a^b nicht $= b^a$, d. h. Dignand und Exponent können durchaus nicht mit einander verwechselt werden, ohne daß die Potenz eine andere würde. *)

Anmerkung. Daß diese Verwechselung nicht allgemein zulässig ist, geht schon aus der Vergleichung zweier Potenzen von der Form 3^4 und 4^3 hervor, von denen die erstere nur eine ungerade, die letztere nur eine gerade Zahl geben kann. Wir aber haben im Vorausgehenden mehr als dieß, nemlich gezeigt, daß eine solche Verwechselung allgemein nicht zulässig ist.

§. 42.

Die Größen, welche wir in der eben vorausgehenden Rechnungsart kennen gelernt haben, können offenbar noch auf andere als die bisherige Art unter sich verbunden werden. Es kann nemlich

---

*) Nur in einem ganz speziellen Falle kann das geschehen, nemlich in $2^4 = 42$, in welchem Falle eben, wegen $4 = 2 . 2$, das eine Produkt gar keinen andern Faktor enthält als das andere.

1) die Potenz mit dem Exponenten verbunden werden, um den Dignand,

2) die Potenz mit dem Dignande, um den Exponenten zu erhalten, und es ist nach dem, was wir über die Verwechselung des Dignands und des Exponenten entwickelt haben, keineswegs einerlei, ob wir das Eine oder das Andere thun, so daß hier durch Umkehrung der 5ten Rechnungsart in der That nicht bloß eine, sondern zwei neue Rechnungsarten sich ergeben. Von diesen fassen wir nun zunächst bloß die erstere, unter dem Namen des Radizirens, sowohl für sich, als in ihren Beziehungen zum Potenziren, endlich nach den gemeinsamen Beziehungen beider zu den vorausgegangenen Rechnungsarten näher ins Auge, während wir die letztere, das Logarithmiren, zwar auf dieselbe Weise, aber erst nach den eben angedeuteten Entwickelungen behandeln.

Radiziren heißt also, die Potenz mit dem Exponenten verbinden, um den Dignand zu erhalten. Das Zeichen dieser Verbindung besteht darin, daß man den Exponenten links über der Potenz, zwischen beide aber das sogenannte Wurzelzeichen ($\surd$) setzt; demgemäß ist der Ausdruck des Radizirens

$$\sqrt[b]{a} = (\sqrt[b]{a}),$$

in welchem Ausdrucke die Potenz a nun Radikand, der Exponent b Radikator, der Dignand ($\sqrt[b]{a}$) Wurzel heißt, daher auch $\sqrt[b]{a}$ mit „b^{te} Wurzel aus a" gelesen wird.

Das Radiziren geschieht bei Buchstabenzahlen bloß formell; es ist eben $\sqrt[b]{a}$ nicht $= c$, sondern $= (\sqrt[b]{a})$: bei Zifferzahlen müßte eine eigene Tabelle hiezu auswendig gelernt sein, wie dieß für die 2ten und 3ten Wurzeln von 1 — 10 wirklich geschieht, für weitere Wurzeln aber ohnedies sich kaum der Mühe lohnte.

Zu bemerken ist noch, daß das Radiziren nicht durch fortgesetztes Dividiren, wie etwa das Dividiren durch fortgesetztes Subtrahiren, ersetzt werden könne. Dieß letztere ist dort, wie wir gezeigt haben, nur darum möglich, weil Multiplikand und Multiplikator verwechselt werden dürfen, und daher die eigentliche Aufgabe der Division, die Herstellung des Multiplikands nemlich, auch in die Herstellung des Multiplikators, welche eben durch fortgesetzte Subtraktion bewerkstelligt wird, verwandelt werden kann und darf.

Hier aber beim Radiziren findet keineswegs ein derartiges Verhältniß Statt: weil Dignand und Exponent nicht verwechselt, kann auch der Exponent nicht als der gleiche Faktor betrachtet werden, durch welchen die Potenz nur fortgesetzt dividirt werden dürfte, um zu erfahren, wie vielmal dieser Faktor in der Potenz enthalten sei; umgekehrt wäre ja die dadurch erhaltene Zahl keineswegs der gesuchte Dignand, sondern nur selbst wieder ein Exponent. Das Radiziren hat eben nur Eine materielle Bedeutung, und die ist, aus dem Potenz-Produkte den gleichen Faktor herstellen (einfach setzen), der in demselben so oft enthalten ist, als es der gegebene Exponent angibt.

Daraus geht zugleich hervor, daß Radikand und Radikator nicht verwechselt werden dürfen, daß also nicht $\sqrt[b]{a} = \sqrt[a]{b}$; denn damit wäre gesagt, daß derselbe Faktor, die Wurzel nemlich, bmal in a und zugleich amal in b enthalten sei: nun sei etwa $a > b$, so hieße das, eine und dieselbe Zahl sei in der größern Zahl a weniger oft (b mal) enthalten als in der kleinern b, wo sie amal enthalten ist; das ist unmöglich.*) Ebenso unmöglich aber ist es, wenn wir annehmen, daß $a < b$; also nur, wenn $a = b$ ist, kann $\sqrt[b]{a} = \sqrt[a]{b}$ sein, welcher Satz aber unter dieser Voraussetzung eben nichts weiter, als eine bloße Tautologie ist.

§. 43.

Die gemäß der Definitionen von Potenziren und Radiziren zwischen diesen beiden Rechnungsarten bestehenden Beziehungen finden ihren Ausdruck, wenn wir

1) auf den Ausdruck des Potenzirens die Definition des Radizirens,
2) auf den Ausdruck der letztern Rechnungsart die Definition der erstern anwenden.

Dieß gibt folgende zwei Grundsätze:

I. $\sqrt[b]{(a^b)} = a$, wobei $(a^b) =$ Ptz., $b =$ Exp., $a =$ Dign.;

II. $\left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a$, wobei $\left(\sqrt[b]{a}\right) =$ Dign., $b =$ Exp., $a =$ Potenz.

---

*) Man könnte einwenden, daß ein ächter Bruch ein um so kleineres Produkt gebe, je öfter er mit sich selbst multiplizirt wird: das ist wahr, — aber hier haben wir es mit ganzen Zahlen, nicht mit Brüchen zu thun, indem eine Wurzel, deren Radikator ein Bruch ist, hier noch gar keinen Sinn hat.

Mit Worten: I. Wenn man eine Potenz durch ihren Exponenten radizirt, so erhält man den Dignand;

II. wenn man eine Wurzel mit ihrem Radikator potenzirt, erhält man den Radikand.

§. 44.

Bei der Vergleichung zweier Potenzen a^b und c^d, oder zweier Wurzeln $\sqrt[b]{a}$ und $\sqrt[d]{c}$ sind drei Fälle möglich:

1) beide Zahlen des einen Ausdruckes sind gleich beiden Zahlen des andern,
2) die beiden Ausdrücke haben je eine Zahl gleich, die andere ungleich,
3) sie haben beide Zahlen ungleich.

ad 1) Es sei $\left\{\begin{array}{l} a = c, \\ \underline{b = d,} \end{array}\right.$

so ist sowohl $a^b \overset{III}{=} c^d$,

als auch $\sqrt[b]{a} \overset{III}{=} \sqrt[d]{c}$;

das Erstere, weil der gleiche Faktor ($a = c$), gleich oft gesetzt, in dem einen Falle (bmal gesetzt) kein anderes Produkt geben kann, als in dem andern Falle (dmal gesetzt), — das Letztere, weil, wenn diese Dignande (Wurzeln) nicht gleich wären, sie unmöglich mit den gleichen Zahlen (b und d) potenzirt die gleichen Potenzen (a und c) geben könnten.

Beide Sätze unter dem Namen des dritten Grundsatzes vereinigt sagen:

III. Gleiches mit Gleichem potenzirt, oder Gleiches durch Gleiches radizirt gibt Gleiches.

ad 2) Es sei 1) $\left\{\begin{array}{l} a = c \\ \underline{b > d} \end{array}\right.$ oder 2) $\begin{array}{l} a > c \\ \underline{b = d} \end{array}$

so ist sowohl 1) $a^b > c^d$, als auch 2) $a^b > c^d$,

hingegen 1) $\sqrt[b]{a} < \sqrt[d]{c}$, während 2) $\sqrt[b]{a} > \sqrt[d]{c}$,

welche Sätze sich wie die obigen aus den Grundbegriffen der betreffenden Rechnungsarten leicht herleiten lassen; ebenso einfach ist es, sie mit Worten zu geben, daher wir das Eine, wie das Andere hier nicht weiter verfolgen.

ad 3) Sind endlich beide Zahlen des einen Ausdruckes beiden

des andern ungleich, so ist das Verhältniß der beiden Potenzen wie das der beiden Wurzeln ein gänzlich unbestimmtes. Die eben hierin liegende Möglichkeit, daß beide Potenzen oder beide Wurzeln einander gleich seien, werden wir an ihrem Orte des Weiteren besprechen.

§. 45.

Nachdem wir nun zwei neue Rechnungsarten und deren Resultate kennen gelernt, entsteht offenbar die weitere Aufgabe, diese mit den vorigen Rechnungsarten und ihren Resultaten in Verbindung zu setzen. Dieß geschieht, indem wir

a) die neuen Rechnungsarten auf die Resultate der früheren,

b) diese auf die Resultate jener anwenden.

ad a) Was das Erstere betrifft, müssen wir vor Allem zurückblicken und zusehen, welche von den bisher gefundenen Resultaten und in welcher Form wir sie beibehalten haben. Wir haben nemlich gleich anfangs die Resultate der beiden ersten Rechnungsarten, die Summen und Differenzen, nicht mehr einzeln, sondern nur gemeinsam in der Form der Aggregate mit zu den beiden zweiten Rechnungsarten herübergenommen; hier aber haben wir die Aggregate selbst wieder dahin modifizirt, daß ihre Glieder Produkte oder Quotienten seien. Das Aggregat also, wie wir es jetzt haben, ist jedenfalls ein höheres Resultat, als die Produkte und Quotienten selbst, und ehe wir die neuen Rechnungsarten auf unser Aggregat, müssen wir sie offenbar zuvor auf diese eben genannten Größen anwenden.

Da übrigens das Potenziren und Radiziren von derartigen Aggregaten ohne alle Rückwirkung auf die Ausführung derselben Rechnungsarten mit Produkten und Quotienten ist, so werden wir die das Aggregat betreffenden Aufgaben hier gar nicht, sondern erst später in einem eignen Abschnitte behandeln, so daß uns von der sub a) angeführten Hauptaufgabe hier nur folgende vier spezielle Aufgaben zu lösen übrig bleiben:

1) ein Produkt zu potenziren,
2) einen Quotienten zu potenziren,
3) ein Produkt zu radiziren,
4) einen Quotienten zu radiziren.

ad b) Was die Anwendung der früheren Rechnungsarten auf Potenzen und Wurzeln betrifft, so können wir zwar die Sum-

mation derselben weder übergehen, noch etwa in einen späteren Abschnitt verlegen, aber wir werden mit wenigen Andeutungen darüber hinwegkommen und so auch hier die eigentlichen Aufgaben auf die beiden zweiten Rechnungsarten allein beschränkt finden.

Bei der Summation von Potenzen nemlich sind nur folgende vier Fälle möglich:

1) die Potenzen haben weder gleiche Dignande noch gleiche Exponenten,
2) ungleiche Dignande, aber gleiche Exponenten,
3) gleiche Dignande, aber ungleiche Exponenten,
4) Dignande wie Exponenten gleich.

1) und 2) $a^b + c^d = aaaa \ldots$ b mal $+ cccc \ldots$ d mal $= a^b + c^d$, *) d. h. da eine weitere Vereinfachung hier nicht möglich ist, sondern nur auf den bereits gegebenen Ausdruck der Produkte durch die Potenzen zurückgegangen werden kann, so folgt, daß derartige Potenzen nicht summirt werden können.

3) $a^4 + a^3 = aaaa + aaa = aaa \times (a + 1) = a^3 (a + 1)$, d. h. bei solchen Potenzen ist eine theilweise Summation möglich und geschieht, indem solche als Produkte mit gemeinschaftlichen Faktoren summirt werden.

4) $a^x + 7a^x = (1 + 7)\, a^x = 8a^x$, d. h. solche Potenzen sind offenbar als die gleichen Faktoren von Produkten zu betrachten und hienach die Produkte selbst zu summiren.

Bei der Summation von Wurzeln ergeben sich gleichfalls vier Fälle als die einzig möglichen, wir haben nemlich:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \sqrt[b]{a} + \sqrt[d]{c} = \sqrt[b]{a} + \sqrt[d]{c} \\ 2)\ \sqrt[b]{a} + \sqrt[b]{c} = \sqrt[b]{a} + \sqrt[b]{c} \end{array}\right\}$$

d. h. es ist in diesen beiden Fällen durchaus unmöglich zu wissen, ob die fraglichen Wurzeln dieselben Zahlen oder Produkte mit gleichen Faktoren seien oder nicht, noch weniger aber können sie als solche dargestellt und so summirt werden.

3) $\sqrt[b]{a} + \sqrt[c]{a} = \sqrt[b]{a} + \sqrt[c]{a}$ — hier wäre zwar eine theilweise Summation möglich, allein hiezu gehört eine gewisse Um-

*) Wäre aber auch hier nach 2) $b = d$, so wäre dennoch eine Vereinigung beider Potenzen in Eine, d. h. eine Summation derselben unmöglich.

formung der Wurzeln, von der erst später (§. 49.) die Rede sein kann.

4) $m\sqrt[c]{d} + n\sqrt[c]{d} = (m+n)\sqrt[c]{d}$, wo die Wurzeln wieder nur als die gleichen Faktoren von Produkten auftreten und eigentlich letztere, nicht aber die Wurzeln summirt werden.

Anmerkung. In bestimmten Fällen ist es möglich, durch Vereinfachung der Wurzeln dieselben von der ersten oder zweiten Form auf die dritte zu bringen; wir werden später (§. 50.) in einigen Beispielen darauf zurückkommen.

Dieß über die Summation von Potenzen und Wurzeln bemerkt, bleiben von den unter b) begriffenen Aufgaben nur folgende vier übrig:

1) Potenzen zu multipliziren,
2) [illegible] dividiren,
3) Wurzeln zu multipliziren,
4) [illegible] dividiren.

c) Endlich müssen die beiden neuen Rechnungsarten auch noch auf ihre eigenen Resultate angewendet werden, woraus sich wieder vier Aufgaben ergeben:

1) Potenzen zu potenziren,
2) [illegible] radiziren,
3) Wurzeln zu potenziren,
4) [illegible] radiziren.

Diese dreimal vier Aufgaben zu lösen, wird nun in den folgenden Paragraphen versucht.

§. 46.

a. 1) $(ab)^m = ab \,.\, ab \,.\, ab \,.\, ab \,.\,.\,.\,.$ m mal

$= aaaa \,.\,.\,.\,.$ m mal $\times$ bbbb $.\,.\,.\,.$ m mal

$\overset{1.a}{=} a^m \,.\, b^m$,

d. h. 1) Ein Produkt wird mit einer Zahl potenzirt, indem man jeden Faktor mit der Zahl potenzirt (und die erhaltenen Potenzen mit einander multiplizirt).

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \,.\,.\,.\,.$ m mal

$= \frac{aaaa \,.\,.\,.\,.}{bbbb \,.\,.\,.\,.}$ m mal / m mal

$\overset{2.a}{=} \frac{a^m}{b^m}$,

d. h. 2) Ein Quotient wird mit einer Zahl potenzirt, indem man sowohl Dividend als Divisor mit der Zahl potenzirt (und die erhaltenen Potenzen durch einander dividirt).

$$3)\ \sqrt[m]{ab} \overset{3.a}{=\!=} \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

Die Aufgabe $\sqrt[m]{ab}$ setzt voraus, daß das Produkt ab eine Potenz mit dem Exponenten m sei; ein solches Produkt aber kennen wir bisher nur in $a^m b^m$ des ersten Gesetzes. Dort erhält man den Dignand ab offenbar dadurch, daß man beide Faktoren des Potenz-Produktes mit m radizirt und die erhaltenen Wurzeln a und b $\left(\sqrt[m]{a^m} \overset{I}{=\!=} a;\ \sqrt[m]{b^m} \overset{I}{=\!=} b\right)$ mit einander multiplizirt: mithin verfahren wir auch hier auf dieselbe Weise und erhalten wie oben:

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b},$$

d. h. 3) Ein Produkt wird durch eine Zahl radizirt, indem man die Faktoren desselben durch die Zahl radizirt (und die erhaltenen Wurzeln mit einander multiplizirt).

$$4)\ \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \overset{4.a}{=\!=} \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}},$$

d. h. 4) ein Quotient wird durch eine Zahl radizirt, indem man sowohl Dividend als Divisor durch die Zahl radizirt (und die erhaltene Wurzel des Dividends durch die des Divisors dividirt).

Die Lösung dieser Aufgabe wird mit Bezug auf das zweite Gesetz durch die nämliche Schlußfolgerung gemacht, welche wir so eben für das dritte Gesetz gebraucht haben.

Uebrigens mag zum Ueberfluße die Wahrheit des dritten und vierten Gesetzes hier auch noch streng mathematisch nachgewiesen werden.

$$3)\ \sqrt[m]{ab} \overset{}{=\!=} \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

$$\left(\sqrt[m]{ab}\right)^m \overset{II}{=\!=} \underline{ab};$$

$$\left(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}\right)^m \overset{1}{=\!=} \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \cdot \left(\sqrt[m]{a}\right)^m$$

$$\overset{II}{=\!=} \underline{ab}.$$

4) $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$ $\qquad \left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m}$

$\left(\sqrt[m]{\frac{a}{b}}\right)^m = \frac{a}{b}$; $\qquad = \frac{a}{b}$.

Beispiele:

1) $\left(\frac{3ac}{4xy}\right)^3 = \frac{(3ac)^3}{(4xy)^3} = \frac{3^3a^3c^3}{4^3x^3y^3} = \frac{27a^3c^3}{64x^3y^3}$.

2) $\sqrt[4]{16c^4d^4} = \sqrt[4]{2^4c^4d^4} = 2cd$.

$|: 16 = 2 \,.\, 8 = 2 \,.\, 2 \,.\, 4 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 2^4 :|$

3) $\sqrt[3]{\frac{125a^3}{216b^3}} = \sqrt[3]{\frac{5^3a^3}{2^3 \,.\, 3^3 \,.\, b^3}} = \frac{5a}{2 \,.\, 3b} = \frac{5a}{6b}$.

$|: 125 = 5 \,.\, 25 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 5^3$
$: 126 = 2 \,.\, 108 = 2 \,.\, 2 \,.\, 54 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 27 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 9 :|$
$= 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 2^3 \,.\, 3^3$

4) $\sqrt[5]{\frac{32a^5b^2}{7cd^5}} = \sqrt[5]{\frac{2^5 \,.\, a^5 \,.\, b^2}{7cd^5}} = \frac{\sqrt[5]{2^5} \,.\, \sqrt[5]{a^5} \,.\, \sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[5]{7} \,.\, \sqrt[5]{c} \,.\, \sqrt[5]{d^5}} = \frac{2a\sqrt[5]{b^2}}{d\sqrt[5]{7} \,.\, \sqrt[5]{c}}$.

§. 47.

b. Wenn wir die vier im vorigen §. erhaltenen Gesetze weiter untersuchen, so finden wir, daß sie, sobald sie umgekehrt werden, auch für die unter b) begriffenen Aufgaben die wenn auch beschränkten Lösungen geben; es ist nämlich:

$$1) \; a^m b^m = (ab)^m, \qquad \text{1.a *)}$$

d. h. zwei Potenzen **mit gleichen Exponenten** werden multiplizirt, indem man ihre Dignande multiplizirt und deren Produkt mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

*) Dieses Gesetz könnte auch mit 1 . b bezeichnet werden, ebenso das folgende mit 2 . b u. s. w.; allein da diese Gesetze denn doch die unter b) begriffenen Aufgaben nicht vollständig lösen, so wurde es vorgezogen, sie als bloße Umkehrungen der Gesetze unter a) zu bezeichnen.

$$2)\ \frac{a^m}{b^m} \overset{2.a}{=\!=} \left(\frac{a}{b}\right)^m,$$

d. h. zwei Potenzen **mit gleichen Exponenten** werden durch einander dividirt, wenn man ihre resp. Dignande durch einander dividirt, und den erhaltenen Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

$$3)\ \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \overset{3.a}{=\!=} \sqrt[m]{ab},$$

d. h. zwei Wurzeln **mit gleichen Radikatoren** werden mit einander multiplizirt, indem man deren Radikande mit einander multiplizirt und dieß Produkt durch den gemeinschaftlichen Radikator radizirt.

$$4)\ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \overset{4.a}{=\!=} \sqrt[m]{\frac{a}{b}},$$

d. h. zwei Wurzeln **mit gleichen Radikatoren** werden durch einander dividirt, indem man ihre resp. Radikande durch einander dividirt und den erhaltenen Quotienten durch den gemeinschaftlichen Radikator radizirt.

Beispiele.

1) $32a^5c^3 = 2^5a^5c^3 = (2ac)^5$.

2) $\frac{144c^2}{225d^2} = \frac{2^2 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2 \,.\, c^2}{3^2 \,.\, 5^2 \,.\, d^2} = \frac{(2 \,.\, 2 \,.\, c)^2}{(5d)^2} = \left(\frac{4c}{5d}\right)^2$.

3) $\sqrt[3]{12a^3} \,.\, \sqrt[3]{18b^3} = \sqrt[3]{216a^3b^3} = \sqrt[3]{2^3 3^3 a^3 b^3} = 2.3ab = 6ab$.

4) $\sqrt[5]{\frac{16}{81}} : \sqrt[5]{\frac{3}{64}} = \sqrt[5]{\frac{16}{81} : \frac{3}{64}} = \sqrt[5]{\frac{16 \,.\, 64}{3 \,.\, 81}} = \sqrt[5]{\frac{2^5 \,.\, 2^5}{3^5}}$
$= \frac{2 \,.\, 2}{3} = \frac{4}{3}$.

§. 48.

Die Lösungen des §. 47. gelten, wie wir sehen, bloß für die Fälle, in welchen die betreffenden Potenzen und Wurzeln gleiche Exponenten und Radikatoren haben. Da aber unsere Aufgaben allgemein gestellt waren, so bleibt uns, um sie ganz zu lösen, zu untersuchen:

1) ob und wie Potenzen mit gleichen Dignanden und ungleichen Exponenten multiplizirt und dividirt werden können,

2) dasselbe für Potenzen, die weder den Exponenten noch den Dignand gleich haben,

3) die entsprechenden zwei Aufgaben auch für die Wurzeln.

ad 1) $a^m \cdot a^n = (a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots\ldots \text{m mal}) \times (a \cdot a \cdot a \cdot \ldots\ldots \text{n mal})$

$= aaaaaaa \ldots\ldots (m+n)\text{mal}$

$1.b \quad m+n$

$= a.$

Es ist also möglich, zwei Potenzen mit gleichen Dignanden durch Multiplikation in eine zu vereinigen, und zwar werden solche mit einander multiplizirt, indem man ihre Exponenten addirt (und mit dieser Summe den gemeinschaftlichen Dignand potenzirt).

Ebenso:

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{aaaa \ldots\ldots \text{m mal}}{aaaa \ldots\ldots \text{n mal}} = aaa \ldots\ldots (m-n)\text{mal} = a^{m-n},$$

d. h. Potenzen mit gleichen Dignanden werden durch einander dividirt, indem man vom Exponenten des Dividend's den des Divisors subtrahirt (und mit dieser Differenz den gemeinschaftlichen Dignand potenzirt).

Anmerkung 1) $a^5 \cdot a = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6$, aber auch $a^5 \cdot a^1 = a^{5+1} = a^6$, mithin ist $a = a^1$, d. h.: Jede Zahl kann als Potenz mit dem Exponenten 1 angesehen werden — ein Satz, der sich eigentlich ohne weitere Ableitung von selbst versteht.

Umgekehrt: der Exponent 1 wird bei einer Potenz in der Regel weggelassen.

Anmerkung. 2) $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$, aber auch

$\frac{a^4}{a^4} = 1$, mithin $a^0 = 1$, d. h.: Jede Potenz mit dem Exponenten 0 ist gleich der Einheit. — Abgesehen von der Ableitung dieses Satzes liegt seine Erklärung in Folgendem: Der Ausdruck a^0 enthält die Forderung, eine Potenz zu setzen, in welcher jede Zahl 0mal, d. h. gar nicht, oder was dasselbe ist, in der keine Zahl als Faktor vorkömmt. Nun enthält aber jedes Produkt, also auch jede Potenz, wenn alle übrigen Faktoren ent-

fernt sind, immer noch den Faktor 1, mithin ist ein solches Produkt und so auch unsere Potenz = 1.*)

Anmerkung 3) $\frac{a^3}{a^3} = \frac{aaa}{aaaaa} = \frac{1}{a^2}$, aber auch

$$\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}, \text{ mithin}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

d. h.: Eine Potenz, deren Exponent eine negative Zahl, ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend 1 und dessen Divisor dieselbe Potenz aber mit positivem Exponenten ist.

Erklärung: Eine Potenz mit negativem Exponenten begreift die Forderung, nicht den betreffenden Faktor so und so oft zu setzen, sondern umgekehrt, ihn, wenn er im Produkte stünde, so vielmal daraus zu entfernen. Dieses Entfernen aber geschieht durch Division, mithin tritt eine derartige Potenz als Divisor auf, für welchen, weil im Produkte der betreffende Faktor eben nicht steht, kein anderer als der Dividend 1 übrig bleibt.

Anmerk. 4) Unsere beiden oben erhaltenen Sätze:

$a^m \cdot a^n \overline{\overline{1.b}} a^{m+n}$ und $\frac{a^m}{a^n} \overline{\overline{2.b}} a^{m-n}$ können, wenn man Summe und Differenz unter dem gemeinschaftlichen Ausdrucke Aggregat begreift, mit Einem Satze umgekehrt und, wie folgt, gelesen werden:

Eine Potenz, deren Exponent ein Aggregat, ist gleich einem Quotienten aus lauter Potenzen desselben Dignands, deren Exponenten für den Dividend die positiven, für den Divisor die negativen Glieder des Aggregates sind, so daß:

$$a^{m-n-o+p} = \frac{a^m \cdot a^p}{a^n \cdot a^o}.$$

---

ad 2) $a^m \cdot b^n = aaa \ldots m\text{mal} \times bbb \ldots n\text{mal} = a^m \cdot b^n$,

ebenso $\frac{a^m}{b^n} = \frac{aaa \ldots m\text{mal}}{bb \ldots n\text{mal}} = \frac{a^m}{b^n}$,

d. h.: Potenzen, welche Dignande und Exponenten ungleich haben,

---

*) Dieses Haften des Faktor 1 an der Zahl, so zwar, daß er aus derselben gar nicht hinweggeschafft werden kann, deutet auf den Begriff der Zahl zurück, gemäß welchem eben eine Zahl ohne die Einheit gar nicht gedacht werden kann.

können weder durch Multiplikation noch durch Division in Eine Potenz vereinigt, also weder eigentlich multiplizirt noch dividirt werden.

---

ad 3) In der Aufgabe „$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a}$", so wie in der „$\frac{\sqrt[m]{a''}}{\sqrt[n]{a}}$ führt weder das Eingehen auf die ursprüngliche Bedeutung der Wurzeln materiell, noch irgend eine bis jetzt mögliche Ableitung formell zu einer Vereinigung der beiden Wurzeln in Eine; um so weniger ist das möglich, wenn auch die Radikande noch verschieden sind. Die in 3) enthaltenen Aufgaben sind sonach alle bis jetzt unlöslich.

Beispiele.

1) $\frac{a^4x^3}{b^2y^5} : \frac{b^4y}{a^2x^3} = \frac{a^4a^2x^3x^3}{b^2b^4y^5y} = \frac{a^6x^6}{b^6y^6} = \frac{(ax)^6}{(by)^6} = \left(\frac{ax}{by}\right)^6.$

2) $\frac{x^{m-3}y^5}{x^{m-5}y^{m+3}} = x^{(m-3)-(m-5)}y^{5-(m+3)} = x^2y^{-(m-2)} = \frac{x^2}{y^{m-2}}.$

3) $\frac{a^3b^{-4}}{c^{-5}d} = a^3 \cdot \frac{1}{b^4} : \frac{1}{c^5} \cdot d = \frac{a^3}{b^4} : \frac{d}{c^5} = \frac{a^3c^5}{b^4d}.$

Aus diesem Beispiele geht hervor, daß die negativen Exponenten entfernt werden, indem man die betreffenden Potenzen mit denselben aber positiven Exponenten aus dem Dividende in den Divisor, aus dem Divisor aber in den Dividend setzt.

4) $\frac{10}{7}a^{3m-2}b^4c^{-5} \times \frac{14}{3}a^{-(2m-3)}b^{m+3}c^2 : \frac{4}{3}a^{m+4}b^{m+8}c^{-2} =$

$= \frac{10}{7} \cdot \frac{14}{3}a^{3m-2}a^{-(2m-3)}b^4b^{m+3}c^{-5}c^2 : \frac{4}{3}a^{m+4}b^{m+8}c^{-2} =$

$= \frac{20}{3}a^{m+1}b^{m+7}c^{-3} : \frac{4}{3}a^{m+4}b^{m+8}c^{-2} =$

$= \frac{20}{3} : \frac{4}{3} \cdot \frac{a^{m+1}}{a^{m+4}} \cdot \frac{b^{m+7}}{b^{m+8}} \cdot \frac{c^{-3}}{c^{-2}} = 5a^{-3}b^{-1}c^{-1} = \frac{5}{a^3bc}.$

5) $\left(\frac{2c^{n-4}d^{3n+3}}{15f^{-6}} : \frac{6d^{n-3}f^4}{5c^{n+4}}\right) \times \left(\frac{3c^{-(n+3)}f^3}{2d^{n+5}} : \frac{4d^{n-1}f^5}{3c^{n-5}}\right) =$

$= \frac{c^{n-4}c^{n+4}d^{3n+3}}{9d^{n-3}f^{-6}f^4} \times \frac{9c^{-(n+3)}c^{n-5}f^3}{8d^{n+5}d^{n-1}f^5} =$

$= \frac{c^{2n}d^{2n+6}}{9f^{-2}} \times \frac{9c^{-8}f^{-2}}{8d^{2n+4}} = \frac{c^{2n}c^{-8}d^{2n+6}f^{-2}}{8d^{2n+4}f^{-2}} = \frac{c^{2n-8}d^2}{8} =$

$= \frac{1}{8}c^{2n-8}d^2.$

Eine weitere Reihe hieher gehöriger Aufgaben bietet die Multiplikation und Division von Aggregaten, deren Glieder Produkte oder Quotienten aus Potenzen sind, während die Rechnung mit Aggregaten, in deren Gliedern Wurzeln stehen, hier noch nicht Platz greifen kann, indem wir gemäß den Ergebnissen dieses Paragraphen hinsichtlich der Rechnung mit Wurzeln noch zu sehr beschränkt sind.

6)
$$\frac{\frac{x^{m+3}y^{n-1}}{4z^3} - \frac{2x^{2m-1}z^3}{3y^4} - \frac{x^{3m-5}z^7}{2y^{n+7}}}{\frac{2y^{n+6}z}{x^{2m-5}} - \frac{3y^3z^6}{x^{m-1}} + \frac{z^{11}}{x^3y^n}}$$

$$\frac{\frac{y^{2n+5}}{2x^{m-8}z^2} - \frac{4x^4y^{n+2}z^3}{3} - \frac{x_mz^8}{y}}{-\frac{3x^4y^{n+2}z^3}{4} + \frac{2x^mz^8}{y} + \frac{3x^{2m-4}z^{13}}{2y^{n+4}}}$$

$$+ \frac{x^mz^8}{4y} - \frac{2x^{2m-4}z^{13}}{3y^{n+4}} - \frac{x^{3m-8}z^{18}}{2y^{2n+7}}$$

$$\frac{\frac{y^{2n+5}}{2x^{m-8}z^2} - \frac{25}{12}x^4y^{n+2}z^3 + \frac{5x^mz^8}{4y} + \frac{5x^{2m-4}z^{13}}{6y^{n+4}} - \frac{x^{3m-8}z^{18}}{2y^{2n+7}}}{}.$$

Nebenrechnung.

a) $\frac{x^{m+3}y^{n-1}}{4z^3} \cdot \frac{2y^{n+6}z}{x^{2m-5}} = \frac{x^{m+3}y^{n-1}y^{n+6}z}{2x^{2m-5}z^3} = \frac{x^{-(m-8)}y^{2n+5}z^{-2}}{2} =$

$= \frac{y^{2n+5}}{2x^{m-8}z^2};$

$\frac{2x^{2m-1}z^2}{3y^4} \cdot \frac{2y^{n+6}z}{x^{2m-5}} = \frac{4x^{2m-1}y^{n+6}z^2z}{3x^{2m-5}y^4} = \frac{4x^4y^{n+2}z^3}{3};$

$\frac{x^{3m-5}z^7}{2y^{n+7}} \cdot \frac{2y^{n+6}z}{x^{2m-5}} = \frac{x^{3m-5}y^{n+6}z^7z}{x^{2m-5}y^{n+7}} = x^my^{-1}z^8 = \frac{x^mz^8}{y};$

b) $\frac{x^{m+3}y^{n-1}}{4z^3} \cdot \frac{3y^3z^6}{x^{m-1}} = \frac{3x^{m+3}y^{n-1}y^3z^6}{4x^{m-1}z^3} = \frac{3x^4y^{n+2}z^3}{4}$;

$\frac{2x^{2m-1}z^2}{3y^4} \cdot \frac{3y^3z^6}{x^{m-1}} = \frac{2x^{2m-1}y^3z^2z^6}{x^{m-1}y^4} = 2x^m y^{-1}z^8 = \frac{2x^m z^8}{y}$;

$\frac{x^{3m-5}z^7}{2y^{n+7}} \cdot \frac{3y^3z^6}{x^{m-1}} = \frac{3x^{3m-5}y^3z^7z^6}{2x^{m-1}y^{n+7}} = \frac{3x^{2m-4}y^{-(n+4)}z^{13}}{2} = \frac{3x^{2m-4}z^{13}}{2y^{n+4}}$.

c) $\frac{x^{m+3}y^{n-1}}{4z^3} \cdot \frac{z^{11}}{x^3y^n} = \frac{x^{m+3}y^{n-1}z^{11}}{4x^3y^nz^3} = \frac{x^m y^{-1}z^8}{4} = \frac{x^m z^8}{4y}$;

$\frac{2x^{2m-1}z^2}{3y^4} \cdot \frac{z^{11}}{x^3y^n} = \frac{2x^{2m-1}z^2z^{11}}{3x^3y^4y^n} = \frac{2x^{2m-4}z^{13}}{3y^{n+4}}$;

$\frac{x^{3m-5}z^7}{2y^{n+7}} \cdot \frac{z^{11}}{x^3y^n} = \frac{x^{3m-5}z^7z^{11}}{2x^3y^{n+7}y^n} = \frac{x^{3m-8}z^{18}}{2y^{2n+7}}$.

Anmerk. Derlei Multiplikations- sowie auch Divisions-Aufgaben finden sich in allen Aufgaben-Sammlungen zur beliebigen Auswahl, daher sich hier auf dieses einzige Beispiel beschränkt wird.

§. 49.

c. 1) $(a^m)^p = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots$ pmal

$= a^{m+m+m+\ldots \text{ pmal}}$

$\overset{1.c}{=} a^{mp}$

d. h. eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, indem man ihren Exponenten mit der Zahl multiplizirt (und mit diesem Produkte den Dignand potenzirt).

Umgekehrt ist $a^{mp} \overset{1.c}{=} (a^m)^p$

d. h. eine Potenz, deren Exponent ein Produkt, kann als die Potenz einer Potenz dargestellt werden, indem man die Faktoren jenes Produktes zu den beiderseitigen Exponenten macht.

2) In der Aufgabe $\sqrt[p]{a^m}$ wird vorausgesetzt, daß a^m eine Potenz mit dem Exponenten p sei; es kommt also für die Lösung derselben Alles darauf an, a^m auch als solche darzustellen. Nun ist

$a^m = a^{\frac{m}{p} \cdot p} \overset{1.c}{=} \left(a^{\frac{m}{p}}\right)^p$, mithin

$\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[p]{\left(a^{\frac{m}{p}}\right)^p} \overset{I}{=} a^{\frac{m}{p}}$;

es gilt somit $\sqrt[p]{a^m} \overset{2.c}{=} a^{\frac{m}{p}}$

d. h. eine Potenz wird durch eine Zahl radizirt, indem man ihren Exponenten durch die Zahl dividirt (und mit diesem Quotienten den Dignand potenzirt.)

Dieselbe Gleichung [2. c] läßt sich auch auf eine zweite Art lesen und gibt so gelesen einen für die Rechnung mit Wurzeln sehr fruchtbaren Satz, nämlich:

„Jede Wurzel läßt sich als eine Potenz darstellen, indem man den Dignand des Radikands mit einem Quotienten potenzirt, dessen Dividend der Exponent des Radikands, und dessen Divisor der Radikator ist."

Diesem Satze zufolge stehen Exponent des Radikands und Radikator in dem Verhältnisse von Dividend und Divisor eines Quotienten; daher lassen sich alle Veränderungen, welche an diesen beiden Größen dem Werthe des Quotienten unbeschadet vorgenommen werden können, auch an dem Exponenten des Radikands und dem Radikator vornehmen.

Es ist also sowohl $\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[\frac{p}{n}]{a^{\frac{m}{n}}}$,

als auch $\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mn}}$,

d. h. Radikator und Exponent des Radikands können gegen einander verkleinert oder vergrößert werden, ohne daß der Werth der Wurzel dadurch geändert wird, ein Satz, durch dessen Anwendung Wurzeln mit beliebigen Radikatoren in derselben Weise auf einen gemeinschaftlichen Radikator gebracht (und so multiplizir- oder divi-dirbar gemacht) werden, wie man Quotienten mit beliebigen Divisoren auf einen gemeinschaftlichen Divisor bringt (und dadurch summirbar macht).

Kehrt man den Satz [2. c] um, nemlich in

$a^{\frac{m}{p}} \overset{2.c}{=} \sqrt[p]{a^m}$, so heißt er:

„Eine Potenz, deren Exponent ein Quotient, ist gleich einer Wurzel, bei welcher der Divisor dieses Quotienten Radikator und der Dividend Exponent des Radikands ist."

$$3)\ \left(\sqrt[p]{a}\right)^m = \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{a} \cdot \sqrt[p]{a} \ldots . \text{m mal}$$

$$= \sqrt[p]{a \cdot a \cdot a \ldots . \text{m mal}}$$

$$\overset{2.c}{=} \sqrt[p]{a^m}$$

d. h. eine Wurzel wird mit einer Zahl potenzirt, indem man ihren Radikand mit der Zahl potenzirt.

Anmerk. Das Potenziren des Radikands mit der Zahl geschieht, wenn derselbe bereits eine Potenz ist, nach 1. c, indem man dessen Exponenten mit der Zahl multiplizirt. Weil nun aber dieser Exponent und der Radikator im Verhältnisse von Dividend und Divisor eines Quotienten stehen, und es bei diesen einerlei ist, ob man den Dividend mit einer Zahl multiplizirt, oder den Divisor durch dieselbe Zahl dividirt, so auch bei jenen: man kann also statt den Exponenten des Radikands mit der Zahl zu multipliziren auch wohl den Radikator durch die Zahl dividiren, so daß

$$\text{sowohl } \left(\sqrt[p]{a}\right)^m \overset{3.c}{=\!=} \sqrt[\frac{p}{m}]{a^m},$$

$$\text{als auch } \left(\sqrt[p]{a}\right)^m \overset{3.c}{=\!=} \sqrt[m]{a},$$

welche letztere Art, die Wurzel zu potenziren, indeß in der Regel nur dann angewendet wird, wenn der Radikator p durch die Zahl m wirklich theilbar ist.

Kehren wir diesen Satz in seiner zweiten Form um, nemlich: $\sqrt[\frac{p}{m}]{a} \overset{3.c}{=\!=} \left(\sqrt[p]{a}\right)^m$, so sagt er uns, was es für eine Bedeutung habe, wenn der Radikator einer Wurzel ein Quotient ist, und wie derselbe wieder in eine ganze Zahl verwandelt werden könne.

Es ist nemlich $\sqrt[\frac{p}{m}]{a} \overset{3.c}{=\!=} \left(\sqrt[p]{a}\right)^m \overset{3.c}{=\!=} \sqrt[p]{a^m}$ d. h. „Eine Wurzel, deren Radikator ein Quotient, läßt sich in eine andere Wurzel verwandeln, deren Radikator der Dividend dieses Quotienten ist, indem man ihren Radikand mit dem Divisor potenzirt."

4) $\sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} \overset{2.c}{=\!=} \sqrt[m]{a^{\frac{1}{p}}} \overset{2.c}{=\!=} a^{\frac{1}{p}:m} = a^{\frac{1}{mp}} \overset{2.c}{=\!=} \sqrt[mp]{a}$,

$$\text{mithin } \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} \overset{4.c}{=\!=} \sqrt[mp]{a},$$

d. h. eine Wurzel wird durch eine Zahl radizirt, indem man ihren Radikator mit der Zahl multiplizirt (oder, was gemäß der eben vorhergehenden Anmerkung dasselbe ist, den Exponenten ihres Radikands durch die Zahl dividirt) $\left|: \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[p]{a^{\frac{1}{m}}} :\right|$.

Umgekehrt ist, nach $\sqrt[mp]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}}$, eine Wurzel, deren Radikator ein Produkt, gleich einer Wurzel aus einer Wurzel, deren beiderseitige Radikatoren die Faktoren jenes Produktes sind.

§. 50.

Ehe wir zur Anwendung dieser Sätze in den folgenden Beispielen übergehen, müssen wir genauer zusehen, welche Rechnungs-Operationen uns vermittelst derselben möglich gemacht worden sind. Es sind dieß

A. nicht bloß die unmittelbar in diesen Sätzen enthaltenen Operationen des Potenzirens und Radizirens von Potenzen und Wurzeln, sondern

B. auch die der Umformung von Potenzen und Wurzeln. Diese Umformung ist anzuwenden, wenn Potenzen mit negativen oder gebrochenen Exponenten, oder Wurzeln mit derlei Radikatoren gegeben sind oder während der Rechnung zum Vorschein kommen; das Resultat soll eben nur ganze und positive Radikatoren und Exponenten enthalten, Wurzeln aber sollen zudem so weit gereinigt sein, daß sie weder radikable Potenzen, d. h. solche enthalten, deren Exponent durch den Radikator theilbar ist, noch auch Divisoren, so daß zur Umformung von Wurzeln auch die Wegschaffung dieser beiden Arten von Größen zu rechnen ist.

C. Indem die Radikatoren der Wurzeln gemäß der Anmerkung sub 2) des vorigen Paragraphes beliebig, also auch ungleiche in gleiche verwandelt werden können, ist hiedurch die Möglichkeit gegeben, alle beliebigen Wurzeln zu multipliziren und zu dividiren.

D. Endlich wird auch die Rechnung mit Aggregaten, deren Glieder aus Potenzen und Wurzeln bestehen, erst hier allgemein und vollständig durchführbar. Besonders ist hier die Summation von Potenzen und Wurzeln zu erwähnen, welche ursprünglich ungleichartig erscheinen, aber durch die unter B. angeführten Umformungen in die nämlichen verwandelt und dadurch summirbar gemacht werden können.

Wir haben also vier Gruppen hieher gehöriger Beispiele, welche wir noch durch eine fünfte, die der gemischten Beispiele, vervollständigen wollen.

A.

1) $\left[\left(\frac{a^2b^{-3}}{c^{-4}d^5}\right)^{-1}\right]^{-3} = \left(\frac{a^{-2}b^3}{c^4d^{-5}}\right)^{-3} = \frac{a^6b^{-9}}{c^{-12}d^{15}} = \frac{a^6c^{12}}{b^9d^{15}}.$

2) $\left\{2 . \left[\left(-\frac{a}{2}\right)^{-4}\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}^3 = \left[2 . \left(\frac{a^{-4}}{2^{-4}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^3 = \left(2 . \frac{a^2}{2^2}\right)^3 =$

$= 2^3 . \frac{a^6}{2^6} = 2^{-3}a^6 = \frac{a^6}{2^3} = \frac{1}{8}a^6.$

3) $\sqrt[3]{216a^3b^6c^7} = \sqrt[3]{2^3 . 3^3a^3b^6c^7} = 2^{\frac{3}{3}} . 3^{\frac{3}{3}} . a^{\frac{3}{3}} b^{\frac{6}{3}} . c^{\frac{7}{3}} =$

$= 2 . 3 . a . b^2 . c^{2+\frac{1}{3}} = 6ab^2c^2c^{\frac{1}{3}} = 6ab^2c^2\sqrt[3]{c}.$

4) $\left(-b\sqrt[8]{2b^{-7}\sqrt[3]{b^2}}\right)^4 = b^4\sqrt[8]{2^4b^{-28}\sqrt[3]{b^8}} = b^4 . 2^{\frac{4}{8}} b^{-\frac{28}{8}} \sqrt[3]{b}$

$= b^4 . 2^{\frac{1}{2}} b^{-4+\frac{1}{2}} \sqrt[3]{b} = b^4 . 2^{\frac{1}{2}} b^{-4} b^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{b} = \sqrt[2]{2} . \sqrt[2]{b} . \sqrt[3]{b} =$

$= \sqrt[2]{2b} . \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{2^3b^3} . \sqrt[6]{b^2} = \sqrt[6]{8b^5};$

oder $\left(-b\sqrt[8]{2b^{-7}\sqrt[3]{b^2}}\right)^4 = b^4\sqrt[2]{2b^{-7}\sqrt[3]{b^2}} =$

$= b^4\sqrt[2]{2} . \sqrt[2]{b^{-7}} . \sqrt[2]{\sqrt[3]{b^2}} = b^4\sqrt[2]{2} . \sqrt[2]{b^{-6}b} . \sqrt[3]{b} =$

$= b^4 . b^{-4}\sqrt[2]{2} . \sqrt[2]{b} . \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{8b^5}.$

5) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[-1]{a^4b^{-5}}}} = \sqrt[6]{\sqrt[-1]{a^4b^{-5}}} = \sqrt[-6]{a^4b^{-5}} = \sqrt[6]{a^{-4}b^5} =$

$= \sqrt[6]{\frac{b^5}{a^4}} = \sqrt[6]{\frac{a^2b^5}{a^6}} = \frac{1}{a}\sqrt[6]{a^2b^5}.$

B.

1) $\sqrt[-2]{ab^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt[2]{a^{-1}b^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{a^{-2}b} = \sqrt[4]{\frac{b}{a^2}} = \sqrt[4]{\frac{a^2b}{a^4}} = \frac{1}{a}\sqrt[4]{a^2b}.$

2) $\sqrt[3]{\frac{a^{2m-1}}{x^{-(m+3)}}} = \sqrt[m]{\frac{a^{6m-3}}{x^{-(3m+3)}}} = \sqrt[m]{a^{6m-3}x^{3m+3}} =$

$= \sqrt[m]{a^{6m} . a^{-3} . x^{3m} . x^3} = a^6\sqrt[m]{a^{-3} . x^3}\sqrt[m]{x^3} = a^6x^3\sqrt[m]{a^{-3}x^3} =$

$= a^6x^3\sqrt[m]{\left(\frac{x}{a}\right)^3}.$

C.

1) $\sqrt[m]{a^{-(2m-3)}b^{m+2}} \times \sqrt[-m]{a^2b^8} \times \sqrt[4]{a^8b^{-4}} \times \sqrt[2m]{a^{-2}b^{14}} =$

$= \sqrt[4m]{a^{-(8m-12)}b^{4m+4}} \times \sqrt[4m]{a^{-8}b^{-32}} \times \sqrt[4m]{a^{8m}b^{-4m}} \times \sqrt[4m]{a^{-4}b^{28}} =$

$= \sqrt[4m]{a^{-(8m-12)} \cdot a^{-8} \cdot a^{8m} \cdot a^{-4} \times b^{4m+4} \cdot b^{-32} \cdot b^{-4m} \cdot b^{28}} =$

$= \sqrt[4m]{a^0b^0} = \sqrt[4m]{1} = 1.$

2) $\left(\sqrt[6]{\frac{a^2b^3}{c^4}} \times \sqrt[8]{\frac{a^3c^2}{b^9}}\right) : \left(\sqrt[12]{\frac{b^9}{a^2c^{14}}} \times \sqrt[8]{\frac{b}{ac^2}}\right) =$

$= \left(\sqrt[24]{\frac{a^8b^{12}}{c^{16}}} \times \sqrt[24]{\frac{a^9c^6}{b^{15}}}\right) : \left(\sqrt[24]{\frac{b^{18}}{a^4c^{28}}} \times \sqrt[24]{\frac{b^3}{a^3c^6}}\right)$

$= \sqrt[24]{\frac{a^8a^9b^{12}c^6}{b^{15}c^{16}}} : \sqrt[24]{\frac{b^{18}b^3}{a^4a^3c^{28}c^6}} =$

$= \sqrt[24]{a^{17}b^{-3}c^{-10}} : \sqrt[24]{\frac{b^{21}}{a^7c^{34}}} =$

$= \sqrt[24]{\frac{a^{17} \cdot a^7 \cdot b^{-3}c^{-10} \cdot c^{34}}{b^{21}}} = \sqrt[24]{a^{24}b^{-24}c^{24}} = ab^{-1}c = \frac{ac}{b}.$

D.

1) $\frac{(-2a)^3}{a} + \left(\frac{2}{-a^2}\right)^{-1} + \frac{1}{(2a)^{-2}} + 10 \cdot \frac{(a \times -1)^{2m}}{(a^2)^{m-1}} =$

$= -8a^2 - \frac{a^2}{2} + 4a^2 + 10a^2 = \frac{11}{2}a^2.$

Nebenrechnung.

$\frac{(-2a)^3}{a} = \frac{-8a^3}{a} = -8a^2; \quad \left(\frac{2}{-a^2}\right)^{-1} = \frac{2^{-1}}{-a^{-2}} = -\frac{a^2}{2};$

$\frac{1}{(2a)^{-2}} = \frac{1}{2^{-2}a^{-2}} = 2^2a^2 = 4a^2; \quad 10 \times \frac{(a \times -1)^{2m}}{(a^2)^{m-1}} = 10 \times \frac{a^{2m} \times 1^{2m}}{a^{2m-2}}$

$= 10a^2 \times 1 = 10a^2.$

2) $\frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b^8}{a^2}} + \frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b^6}{a^3}} - a^2b\sqrt[4]{\frac{16}{a^6b^4}} - \frac{4}{ab^2}\sqrt[12]{a^{20}b^{28}} + \frac{b}{a}\sqrt[12]{\frac{a^{16}}{b^{12}}}$

$+ ab^2\sqrt[3]{\frac{27}{ab^5}} =$

$= \sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[2]{a} - 2\sqrt[2]{a} - 4\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[2]{a} + 3\sqrt[3]{a^2b} = 0.$

Nebenrechnung.

$$\frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b^8}{a^2}} = \frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}} = \frac{a}{b}\sqrt[3]{\frac{a^2b^3b}{a^3}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{a^2b};$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[6]{\frac{b^6}{a^3}} = \frac{a}{b}\sqrt[2]{\frac{b^2}{a}} = \frac{a}{b}\sqrt[2]{\frac{ab^2}{a^2}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{a};$$

$$a^2b\sqrt[4]{\frac{16}{a^6b^4}} = a^2b\sqrt[4]{\frac{2^4}{a^6b^4}} = a^2b\sqrt[2]{\frac{2^2}{a^3b^2}} = a^2b\sqrt[2]{\frac{2^2a}{a^4b^2}} =$$

$$= \frac{2a^2b}{a^2b}\sqrt[2]{a} = 2\sqrt[2]{a};$$

$$\frac{4}{ab^2}\sqrt[12]{a^{20}b^{28}} = \frac{4}{ab^2}\sqrt[3]{a^5b^7} = \frac{4}{ab^2}\sqrt[3]{a^3a^2b^6b} = \frac{4ab^2}{ab^2}\sqrt[3]{a^2b} =$$

$$= 4\sqrt[3]{a^2b};$$

$$\frac{b}{a}\sqrt[12]{\frac{a^{18}}{b^{12}}} = \frac{b}{a}\sqrt[2]{\frac{a^3}{b^2}} = \frac{b}{a}\sqrt[2]{a^2\cdot\frac{a}{b^2}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{a};$$

$$ab^2\sqrt[3]{\frac{27}{ab^5}} = ab^2\sqrt[3]{\frac{3^3}{ab^5}} = ab^2\sqrt[3]{\frac{3^3a^2b}{a^3b^6}} = ab^2\cdot\frac{3}{ab^2}\sqrt[3]{a^2b} =$$

$$= 3\sqrt[3]{a^2b}.$$

3) $\sqrt[2]{50} + \sqrt[-2]{\frac{1}{2}} - 4\sqrt[-2]{2} + \sqrt[-3]{18^{-\frac{5}{2}}} + 6\sqrt[6]{\frac{1}{8}} =$

$$= 5\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{2} - 2\sqrt[2]{2} + 3\sqrt[2]{2} + 3\sqrt[2]{2} = 10\sqrt[2]{2}.$$

Nebenrechnung.

$$\sqrt[2]{50} = \sqrt[2]{2\,.\,5^2} = 5\sqrt[2]{2};\quad \sqrt[-2]{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{\frac{1^{-1}}{2^{-1}}} = \sqrt[2]{\frac{2}{1}} = \sqrt[2]{2};$$

$$4\sqrt[-2]{2} = 4\sqrt[2]{2^{-1}} = 4\sqrt[2]{\frac{1}{2}} = 4\sqrt[2]{\frac{2}{2^2}} = \frac{4}{2}\sqrt[2]{2} = 2\sqrt[2]{2};$$

$$\sqrt[-3]{18^{-\frac{5}{2}}} = \sqrt[1]{18^{\frac{1}{2}}} = (2\,.\,3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{2\,.\,3^2} = 3\sqrt[2]{2};\ 6\sqrt[6]{\frac{1}{8}} =$$

$$= 6\sqrt[6]{\frac{1}{2^3}} = 6\sqrt[6]{\frac{2^3}{2^6}} = \frac{6}{2}\sqrt[6]{2^3} = 3\sqrt[2]{2}.$$

4) $$\begin{array}{r} 2\sqrt[2]{5} + \sqrt[2]{8} - \sqrt[2]{12} \\ \frac{1}{3}\sqrt[2]{30} - \frac{2}{3}\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2} \\ \hline \frac{10}{3}\sqrt[2]{6} + \frac{4}{3}\sqrt[2]{15} - 2\sqrt[2]{10} \\ -\frac{4}{3}\sqrt[2]{6} - \frac{4}{3}\sqrt[2]{15} + 4 \\ \hline -2\sqrt[2]{6} + 2\sqrt[2]{10} + 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad +8, \end{array}$$ es ist also

$$\left(2\sqrt[2]{5} + \sqrt[2]{8} - \sqrt[2]{12}\right)\left(\frac{1}{3}\sqrt[2]{30} - \frac{2}{3}\sqrt[2]{3} + \sqrt[2]{2}\right) = 8.$$

Nebenrechnung.

a) $2\sqrt[2]{5} \times \frac{1}{3}\sqrt[2]{30} = \frac{2}{3}\sqrt[2]{150} = \frac{2}{3}\sqrt[2]{2.3.5^2} = \frac{10}{3}\sqrt[2]{6}$;

$\sqrt[2]{8} \times \frac{1}{3}\sqrt[2]{30} = \frac{1}{3}\sqrt[2]{240} = \frac{1}{3}\sqrt[2]{2^4.3.5} =$

$\frac{2^2}{3}\sqrt[2]{3.5} = \frac{4}{3}\sqrt[2]{15}$;

$\sqrt[2]{12} \times \frac{1}{3}\sqrt[2]{30} = \frac{1}{3}\sqrt[2]{2.2.3.2.3.5} = \frac{1}{3}\sqrt[2]{2^3.3^2.5} =$

$\frac{2.3}{3}\sqrt[2]{2.5} = 2\sqrt[2]{10}$.

b) $2\sqrt[2]{5} \times \frac{2}{3}\sqrt[2]{3} = \frac{4}{3}\sqrt[2]{15}$;

$\sqrt[2]{8} \times \frac{2}{3}\sqrt[2]{3} = \frac{2}{3}\sqrt[2]{2^3.3} = \frac{2.2}{3}\sqrt[2]{2.3} = \frac{4}{3}\sqrt[2]{6}$;

$\sqrt[2]{12} \times \frac{2}{3}\sqrt[2]{3} = \frac{2}{3}\sqrt[2]{2.2.3.3} = \frac{2}{3}\sqrt[2]{2^2.3^2} = \frac{2.2.3}{3} = 4$.

c) $2\sqrt[2]{5} \times \sqrt[2]{2} = 2\sqrt[2]{10}$;

$\sqrt[2]{8} \times \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{2^3.2} = \sqrt[2]{2^4} = 2^2 = 4$;

$\sqrt[2]{12} \times \sqrt[2]{2} = \sqrt[2]{2.2.3.2} = \sqrt[2]{2^2.6} = 2\sqrt[2]{6}$.

5) $$\begin{array}{r} 3\sqrt[2]{2} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[6]{32} \\ 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[2]{8} + \sqrt[3]{4} \\ \hline 9\sqrt[6]{32} + 12 - 6\sqrt[6]{2} \\ -12 - 8\sqrt[6]{2} + 4\sqrt[3]{2} \\ +6\sqrt[6]{2} + 4\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[2]{2} \\ \hline 9\sqrt[6]{32} - 8\sqrt[6]{2} + 8\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[2]{2}. \end{array}$$

Nebenrechnung.

a) $3\sqrt[2]{2} \cdot 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[6]{2^3} \cdot 3\sqrt[6]{2^2} = 9\sqrt[6]{2^5} = 9\sqrt[6]{32}$;

$\sqrt[3]{32} \times 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{64} = 3\sqrt[3]{2^6} = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$;

$\sqrt[6]{32} \times 3\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^5} \cdot 3\sqrt[6]{2^2} = 3\sqrt[6]{2^7} = 3.2\sqrt[6]{2} = 6\sqrt[6]{2}$.

b) $3\sqrt[2]{2} \cdot \sqrt[2]{8} = 3\sqrt[2]{16} = 3\sqrt[2]{2^4} = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$;

$\sqrt[3]{32} \cdot \sqrt[2]{8} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[6]{2^{10}} \cdot \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[6]{2^{19}} =$

$= 2^3\sqrt[6]{2} = 8\sqrt[6]{2}$;

$\sqrt[6]{32} \times \sqrt[2]{8} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[2]{2^3} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^9} = \sqrt[6]{2^{14}} =$

$= \sqrt[3]{2^7} = 2^2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$;

c) $3\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{4} = 3\sqrt[2]{2} \times \sqrt[3]{2^2} = 3\sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{2^4} =$

$= 3\sqrt[6]{2^7} = 3 \cdot 2\sqrt[6]{2} = 6\sqrt[6]{2}$;

$\sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2^7} = 2^2\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$;

$\sqrt[6]{32} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5} \cdot \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[6]{2^9} =$

$= \sqrt[2]{2^3} = 2\sqrt[2]{2}$.

6) $\dfrac{\frac{y^2}{x}\sqrt[3]{x^2y} + y\sqrt[4]{x^2y} - x\sqrt[6]{x^2y}}{\frac{y}{x^2}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}} - \frac{1}{x}\sqrt[6]{x^4y^5} - \frac{1}{y}\sqrt[4]{x^2y^3}}$

$\dfrac{\frac{y^4}{x^2}\sqrt[2]{x^2y} + \frac{y^3}{x}\sqrt[6]{x^2y} - y^2\sqrt[12]{x^2y}}{-\frac{y^3}{x}\sqrt[6]{x^2y} - y^2\sqrt[12]{x^2y} + xy}$

$-y^2\sqrt[12]{x^2y} - xy + \frac{x}{y}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}}$

$\dfrac{\frac{y^4}{x^2}\sqrt[4]{x^2y} \qquad -3y^2\sqrt[12]{x^2y} \quad + \frac{x}{y}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}}}{}$

Nebenrechnung.

a) $\dfrac{y^2}{x}\sqrt[3]{x^2y} \times \dfrac{y}{x^2}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}} = \dfrac{y^2}{x}\sqrt[12]{x^8y^4} \times \dfrac{y}{x^2}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}} =$

$= \dfrac{y^3}{x^3}\sqrt[12]{x^{18}y^{15}} = \dfrac{y^3}{x^3}\sqrt[4]{x^6y^5} = \dfrac{y^3}{x^3} \cdot xy\sqrt[4]{x^2y} = \dfrac{y^4}{x^3}\sqrt[4]{x^2y}$;

$$y\sqrt[4]{x^2y} \times \frac{y}{x^2}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}} = y\sqrt[12]{x^6y^3} \times \frac{y}{x^2}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}} =$$

$$= \frac{y^2}{x^2}\sqrt[12]{x^{16}y^{14}} = \frac{y^2}{x^2}\sqrt[6]{x^8y^7} = \frac{y^2}{x^2} \cdot xy\sqrt[6]{x^2y} = \frac{y^3}{x}\sqrt[6]{x^2y};$$

$$x\sqrt[6]{x^2y} \times \frac{y}{x^2}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}} = x\sqrt[12]{x^4y^2} \times \frac{y}{x^2}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}} =$$

$$= \frac{y}{x}\sqrt[12]{x^{14}y^{13}} = \frac{y}{x} \cdot xy\sqrt[12]{x^2y} = y^2\sqrt[12]{x^2y};$$

b) $$\frac{y^2}{x}\sqrt[3]{x^2y} \times \frac{1}{x}\sqrt[6]{x^4y^5} = \frac{y^2}{x}\sqrt[6]{x^4y^2} \times \frac{1}{x}\sqrt[6]{x^4y^5} =$$

$$= \frac{y^2}{x^2}\sqrt[6]{x^8y^7} = \frac{y^3}{x}\sqrt[6]{x^2y};$$

$$y\sqrt[4]{x^2y} \times \frac{1}{x}\sqrt[6]{x^4y^5} = y\sqrt[12]{x^6y^3} \times \frac{1}{x}\sqrt[12]{x^8y^{10}} =$$

$$= \frac{y}{x}\sqrt[12]{x^{14}y^{13}} = y^2\sqrt[12]{x^2y};$$

$$x\sqrt[6]{x^2y} \times \frac{1}{x}\sqrt[6]{x^4y^5} = \sqrt[6]{x^6y^6} = xy;$$

c) $$\frac{y^2}{x}\sqrt[3]{x^2y} \times \frac{1}{y}\sqrt[4]{x^2y^3} = \frac{y^2}{x}\sqrt[12]{x^8y^4} \times \frac{1}{y}\sqrt[12]{x^6y^9} =$$

$$= \frac{y}{x}\sqrt[12]{x^{14}y^{13}} = y^2\sqrt[12]{x^2y};$$

$$y\sqrt[4]{x^2y} \times \frac{1}{y}\sqrt[4]{x^2y^3} = \sqrt[4]{x^4y^4} = xy;$$

$$x\sqrt[6]{x^2y} \times \frac{1}{y}\sqrt[4]{x^2y^3} = x\sqrt[12]{x^4y^2} \times \frac{1}{y}\sqrt[12]{x^6y^9} = \frac{x}{y}\sqrt[12]{x^{10}y^{11}}.$$

7) $$12x\sqrt[4]{xy^3} + 7x\sqrt[12]{x^7y} - \frac{32x^2}{y}\sqrt[12]{\frac{y^5}{x}} + \frac{7x^2}{y}\sqrt[4]{\frac{x}{y}} + \frac{6x^2}{y^2}\sqrt[12]{x^7y}$$

$$: \left(4\sqrt[2]{xy} + 5x\sqrt[6]{\frac{1}{xy}} - \frac{6x}{y}\sqrt[6]{xy}\right) = 3\sqrt[4]{x^3y} - \frac{2x}{y}\sqrt[12]{xy^7}$$

$$- \frac{x}{y^2}\sqrt[12]{x^5y^{11}}.$$

Die Nebenrechnung wie bei dem vorhergehenden Multiplikations-Beispiele.

8) $\dfrac{7\sqrt[2]{6}+\sqrt[2]{10}}{\frac{4}{3}\sqrt[2]{3}+\sqrt[2]{6}-\sqrt[2]{10}}=?$

Diese Aufgabe würde als die einer uneigentlichen Division erscheinen, wenn wir nicht im 4. Beispiele gesehen hätten, daß bei der Multiplikation von Aggregaten, deren Glieder nur zweite Wurzeln enthalten, Produkte entstehen können, die keines der Kennzeichen eines Produktes mehr erkennen lassen. Darum ist aber auch die Ausführung der Division auf dem gewöhnlichen Wege ganz unmöglich, weil nemlich der Dividend kein Glied enthält, welches rein durch Multiplikation entstanden wäre. Man löst daher diese und ähnliche Aufgaben vermittelst des Satzes: „$(\sqrt[2]{a}+\sqrt[2]{b})\times(\sqrt[2]{a}-\sqrt[2]{b})=a-b$," indem man Dividend und Divisor mit dem im Zeichen des letzten Gliedes veränderten Divisor multiplizirt und dieß so lange fortsetzt, bis der Divisor in die Differenz zweier bloßer Zahlen verwandelt ist, wie im Folgenden zu ersehen ist.

$$\frac{7\sqrt[2]{6}+\sqrt[2]{10}}{\frac{4}{3}\sqrt[2]{3}+\sqrt[2]{6}-\sqrt[2]{10}}=\frac{21\sqrt[2]{6}+3\sqrt[2]{10}}{4\sqrt[2]{3}+3\sqrt[2]{6}-3\sqrt[2]{10}}=$$

$$=\frac{(21\sqrt[2]{6}+3\sqrt[2]{10})\,(4\sqrt[2]{3}+3\sqrt[2]{6}+3\sqrt[2]{10})}{(4\sqrt[2]{3}+3\sqrt[2]{6}-3\sqrt[2]{10})\,(4\sqrt[2]{3}+3\sqrt[2]{6}+3\sqrt[2]{10})}=$$

$$=\frac{468+252\sqrt[2]{2}+144\sqrt[2]{15}+12\sqrt[2]{30}}{12+72\sqrt[2]{2}}=$$

$$=\frac{39+21\sqrt[2]{2}+12\sqrt[2]{15}+\sqrt[2]{30}}{1+6\sqrt[2]{2}}=$$

$$=\frac{(39+21\sqrt[2]{2}+12\sqrt[2]{15}+\sqrt[2]{30})\,(1-6\sqrt[2]{2})}{(1+6\sqrt[2]{2})\,(1-6\sqrt[2]{2})}=$$

$$=\frac{-213-213\sqrt[2]{2}-71\sqrt[2]{30}}{-71}=3+3\sqrt[2]{2}+\sqrt[2]{30}.$$

E.

1) $$\sqrt[3]{\frac{\left(a^{-2}\sqrt[12]{a^{-2}b^{9}}\right)^{3}}{\left(\sqrt[-4]{a^{3}}\right)^{5}\sqrt[2]{(a^{-2}b^{3})^{3}}}}:\left(\frac{\sqrt[-3]{\sqrt[2]{a^{3}b^{4}}}\cdot\sqrt[4]{b^{3}}}{a^{-2}\sqrt[2]{ab^{-3}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right)^{2}}}\right)^{-2}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{\left(a^{-2}\sqrt[12]{a^{-2}b^{9}}\right)^{3}}}{\sqrt[3]{\sqrt[-4]{a^{15}}\cdot\sqrt[2]{a^{-6}b^{9}}}}:\frac{\left(\sqrt[-6]{a^{3}b^{4}}\cdot\sqrt[4]{b^{3}}\right)^{-2}}{\left(a^{-2}\sqrt[2]{ab^{-3}}\cdot\sqrt[3]{a^{2}b^{-2}}\right)^{-2}}=$$

$$=\frac{a^{-2}\sqrt[12]{a^{-2}b^{9}}}{\sqrt[-4]{a^{5}}\cdot\sqrt[2]{a^{-2}b^{3}}}:\frac{\sqrt[3]{a^{3}b^{4}}\cdot\sqrt[-2]{b^{3}}}{a^{4}\sqrt[-1]{ab^{-3}}\cdot\sqrt[3]{a^{-4}b^{4}}}=$$

$$=\frac{a^{-2}\sqrt[12]{a^{-2}b^{9}}}{\sqrt[4]{a^{-5}}\cdot\sqrt[4]{a^{-4}b^{6}}}:\frac{\sqrt[6]{a^{6}b^{8}}\cdot\sqrt[6]{b^{-9}}}{a^{4}\cdot a^{-1}b^{3}\sqrt[3]{a^{-4}b^{4}}}=$$

$$=\frac{a^{-2}\sqrt[12]{a^{-2}b^{9}}}{\sqrt[4]{a^{-9}b^{6}}}:\frac{\sqrt[6]{a^{6}b^{-1}}}{a^{3}b^{3}\sqrt[3]{a^{-4}b^{4}}}=\frac{a^{-2}a^{3}b^{3}\sqrt[12]{a^{-2}b^{9}}\cdot\sqrt[12]{a^{-16}b^{16}}}{\sqrt[12]{a^{-27}b^{18}}\cdot\sqrt[12]{a^{12}b^{-3}}}=$$

$$=\frac{ab^{3}\sqrt[12]{a^{-18}b^{25}}}{\sqrt[12]{a^{-15}b^{16}}}=ab^{3}\sqrt[12]{a^{-3}b^{9}}=ab^{3}\sqrt[4]{\frac{b^{3}}{a}}=ab^{3}\sqrt[4]{\frac{a^{3}b^{3}}{a^{4}}}=$$

$$=b^{3}\sqrt[4]{a^{3}b^{3}}.$$

2) $$\frac{\sqrt[m]{\left(a^{-3}\sqrt[-2]{b^{4m-9}}\right)^{-2}}}{\left(\sqrt[-5m]{a^{5}\sqrt[3]{b^{-4}}}\right)^{-10}}\times\left(\sqrt[-m]{\sqrt[3]{a^{-(m+4)}b^{3m-7}}}\right)^{3}=$$

$$=\frac{\sqrt[m]{a^{6}b^{4m-9}}}{\frac{m}{\sqrt[2]{a^{5}\sqrt[3]{b^{-4}}}}}\times\left(\sqrt[-3m]{a^{-(m+4)}b^{3m-7}}\right)^{3}=$$

$$=\frac{\sqrt[m]{a^{6}b^{4m-9}}}{\sqrt[m]{a^{10}\sqrt[3]{b^{-8}}}}\times\sqrt[-m]{a^{-(m+4)}b^{3m-7}}=$$

$$=\frac{\sqrt[m]{a^{6}b^{4m-9}}}{\sqrt[m]{a^{10}}\cdot\sqrt[3m]{b^{-8}}}\times\sqrt[m]{a^{m+4}b^{-(3m-7)}}=$$

$$= \frac{\sqrt[3m]{a^{18}b^{12m-27}} \cdot \sqrt[3m]{a^{3m+12}b^{-(9m-21)}}}{\sqrt[3m]{a^{30}} \cdot \sqrt[3m]{b^{-8}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3m]{a^{3m+30}b^{3m-6}}}{\sqrt[3m]{a^{30}b^{-8}}} = \sqrt[3m]{a^{3m}b^{3m+2}} = ab\sqrt[3m]{b^2}.$$

Potenziren und Radiziren von Aggregaten.

§. 51.

Nachdem wir in dem Vorhergehenden die in §. 44. uns gestellten dreimal vier Aufgaben gelöst haben, kehren wir zum Potenziren und Radiziren von Aggregaten zurück. Man beschränkt sich hier gewöhnlich auf die zweite und dritte Potenz, und entsprechend auf die zweite und dritte Wurzel, so daß man nur diese Aufgaben speziell ausführt; allgemein aber behandelt man die Aufgabe des Potenzirens und Radizirens von Aggregaten nur für einen zweigliederigen Ausdruck (Binom) im sogenannten binomischen Lehrsatze. Wir haben also:

1) Aggregate zur zweiten Potenz (zum Quadrat) zu erheben (zu quadriren);
2) solche zur dritten (zum Cubus) zu erheben (zu cubiren);
3) aus Aggregaten die zweite oder Quadrat-,
4) die dritte oder Cubikwurzel zu ziehen,
5) endlich den binomischen Lehrsatz zu entwickeln.

Erste Aufgabe.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2.$$

Leitet man dieses Resultat unmittelbar aus der Aufgabe ab, so hat man damit allgemein die Regel gefunden, nach welcher aus der ersten Potenz eines Aggregates unmittelbar die zweite oder das Quadrat desselben hergestellt wird. Sie ist offenbar die folgende:

„Das Quadrat einer zweitheiligen Größe enthält:
1) das Quadrat des ersten Theiles (a^2),
2) das doppelte Produkt beider Theile ($2ab$),
3) das Quadrat des zweiten Theiles (b^2)."

Für ein aus mehr als zwei Gliedern bestehendes Aggregat reicht diese nämliche Regel ebenfalls vollständig aus: man hat eben

nur zuerst die beiden ersten Glieder als allein vorhanden zu betrachten und so zu quadriren; tritt ein drittes Glied hinzu, so bilden die beiden ersten Glieder zusammen nun den ersten Theil, das dritte den zweiten; würde, nachdem das Quadrat der ersten drei Glieder gebildet ist, noch ein viertes Glied vorhanden sein, so stellen nun die ersten drei Glieder zusammen den ersten Theil, das vierte den zweiten vor, u. s. w.

Es ist also:

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2;$$

oder: $(a+b+c+d)^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2$, wobei man aber in gegebenen Fällen die hier nur angezeigten Operationen immer sogleich wirklich ausführt.

Beispiele.

1) $\left(\frac{4x}{3y^2}-\frac{3y}{2x^2}\right)^2=\left(\frac{4x}{3y^2}\right)^2+2.\frac{4x}{3y^2}\times-\frac{3y}{2x^2}+\left(-\frac{3y}{2x^2}\right)^2=$

$=\frac{16x^2}{9y^4}-\frac{4}{xy}+\frac{9y^2}{4x^4}.$

2) $\left(9a\sqrt[2]{ab}-7\sqrt[2]{\frac{a}{b}}\right)^2=81a^3b-126a^2+49\frac{a}{b}.$

Nebenrechnung:

$(9a\sqrt[2]{ab})^2=81a^2.ab=81a^3b;$

$18a\sqrt[2]{ab}\times-7\sqrt[2]{\frac{a}{b}}=-126a\sqrt[2]{a^2}=-126a^2;$

$\left(-7\sqrt[2]{\frac{a}{b}}\right)^2=49\frac{a}{b}.$

3) $(2\sqrt[2]{3}-\sqrt[2]{15})^2=12-12\sqrt[2]{5}+15=27-12\sqrt[2]{5}.$

4) $(2a-3b-4c+5d)^2=$

$=4a^2-12ab+9b^2-16ac+24bc+16c^2+20ad-30bd$

$-40cd+25d^2.$

5) $\left(3a^2\sqrt[3]{a^2b}-5a\sqrt[12]{a^5b^7}-7b\sqrt[6]{\frac{a}{b}}\right)^2=$

$$9a^5\sqrt[3]{ab^2}-30a^4\sqrt[12]{ab^{11}}+25a^2b\sqrt[6]{a^5b}$$
$$-42a^2b\sqrt[6]{a^5b}+70ab\sqrt[12]{a^7b^5}+49b\sqrt[3]{ab^2}$$
$$\overline{9a^5\sqrt[3]{ab^2}-30a^4\sqrt[12]{ab^{11}}-17a^2b\sqrt[6]{a^5b}+70ab\sqrt[12]{a^7b^5}+49b\sqrt[3]{ab^2}}.$$

6) $\left(\frac{4a^3}{3b}-\frac{3}{2}-\frac{2b}{a^3}+\frac{b^2}{4a^6}\right)^2=$

$$\frac{16a^6}{9b^2}-\frac{4a^3}{b}+\frac{9}{4}$$
$$-\frac{16}{3}+\frac{6b}{a^3}+\frac{4b^2}{a^6}$$
$$+\frac{2b}{3a^3}-\frac{3b^2}{4a^6}-\frac{b^3}{a^9}+\frac{b^4}{16a^{12}}$$
$$\overline{\frac{16a^6}{9b^2}-\frac{4a^3}{b}-\frac{37}{12}+\frac{20b}{3a^3}+\frac{13b^2}{4a^6}-\frac{b^3}{a^9}+\frac{b^4}{16a^{12}}}.$$

7) $(a^4+3a^3+4a^2+2a+5)^2=$

$$=a^8+6a^7+9a^6$$
$$+8a^6+24a^5+16a^4$$
$$+4a^5+12a^4+16a^3+4a^2$$
$$+10a^4+30a^3+40a^2+20a+25$$
$$\overline{a^8+6a^7+17a^6+28a^5+38a^4+46a^3+44a^2+20a+25}.$$

Aus diesen Beispielen wie auch bereits aus der allgemeinen Darstellung der Quadrate mehrgliederiger Aggregate geht hervor, daß das Quadrat des vorausgehenden ersten Theiles

durch ein 2tes Glied um 2 weitere Glieder,
" " 3 " " " 3 " " "
" " 4 " " " 4 " " "

u. s. w. vermehrt wird, so daß das Quadrat

eines 2gliederigen Aggregates $1+2=3$ Glieder enthält,
" 3 " " " $1+2+3=6$ " "
" 4 " " " $1+2+3+4=10$ " "
" 5 " " " $1+2+3+4+5=15$ " " u.s.w.

Bei symmetrischen Aggregaten sind immer einige summirbare Glieder vorhanden, wobei man, wenn diese unter einander geschrieben werden, bemerkt, daß mit jedem neu hinzutretenden Gliede des

Aggregates das Quadrat-Aggregat bloß um zwei Glieder, nämlich bei der Bildung jeder neuen Abtheilung je um eines, fortschreitet, weßwegen auch die Anzahl der Glieder solcher Aggregate nach der Summation von den oben angegebenen Zahlen abweicht, nämlich:

für ein 2gliederiges Aggregat $1+2=3$ Glieder,
„ „ 3 „ „ $1+2+2=5$ „
„ „ 4 „ „ $1+2+2+2=7$ „
„ „ 5 „ „ $1+2+2+2+2=9$ „ gibt u. s. w.

§. 52.

Zu den symmetrischen Aggregaten gehören auch die Zifferzahlen; es ist daher, um solche zu quadriren, nicht etwa nöthig, sie mit sich selbst zu multipliziren, sondern sie werden als Aggregate dargestellt und so zum Quadrat erhoben, woraus sich sodann, wie wir sogleich sehen werden, ein einfaches Verfahren ableiten läßt, von Zifferzahlen unmittelbar das Quadrat zu bilden.

$$\text{Z. B. } (3426)^2 = (3000+400+20+6)^2$$
$$= (3\,.\,10^3+4\,.\,10^2+2\,.\,10^1+6\,.\,10^0)^2$$
$$= (3b^3+4b^2+2b+6)^2 =$$

$$= 9b^6$$
$$2b^6+4b^5$$
$$+1b^5+6b^4$$
$$+1b^5+3b^4+6b^3$$
$$+4b^2$$
$$+4b^4+1b^3+0b^2+4b$$
$$+3b+6$$
$$\overline{1b^7+1b^6+7b^5+3b^4+7b^3+4b^2+7b+6}$$

Nebenrechnung.

$6b^3 \times 4b^2 = 24b^5 = 20b^5+4b^5 = 2\,.\,10b^5+4b^5 = 2bb^5+4b^5 =$
$= 2b^6+4b^5;$
$(4b^2)^2 = 16b^4 = 1b^5+6b^4;$
$(3b^3+4b^2) \times 4b = (30b^2+4b^2) \times 4b = 34b^{2*}) \times 4b = 136b^3 =$
$= 1b^5+3b^4+6b^3;$

---

*) Man hat hier die beiden Einen Theil bildenden Glieder $(3b^3+4b^2)$, weil das hier möglich ist, wirklich in Eine Zahl $(34b^2)$ vereinigt.

$$(3b^3+4b^2+2b)\times 12 = (300b+40b+2b)\times 12 = 342b\times 12 =$$
$$= 4104b = 4000b + 100b + 4b =$$
$$= 4b^4 + 1b^3 + 0b^2 + 4b;$$
$$6^3 = 36 = 3b + 6.$$

Wie wir nun aber umgekehrt das Aggregat $3b^3 + 4b^2 + 2b + 6$ durch 3426 ausdrücken, indem wir die Coëfficienten der auf einander folgenden Potenzen von b oder 10 einfach aneinander reihen, so können wir dasselbe auch bei den Summanden und bei der Summe unsers Quadrates thun, so daß wir haben:

$(3426)^2 = 9$
24
16
136
4
4104
36
11737476.

Dasselbe Resultat in derselben Aufeinanderfolge der Summanden erhalten wir unmittelbar, wenn wir die Zahlen von vorne herein ohne Rücksicht auf ihren Lokalwerth nach der für Aggregate aufgestellten Regel quadriren, aber dabei bemerken, daß wir mit jeder neuen Abtheilung um Ein Glied, resp. um Eine Zifferstelle weiter rechts vorzurücken haben. Dieß ist also zugleich die Regel, nach welcher die Zifferzahlen zum Quadrate zu erheben sind.

Beispiele.

1) $(573681)^2 = 25$
70
49
3429
6876
36
91776
64
1147361
329109889761.

2) $(7008406)^2 = 490000$
11200
64
56064
1600
8410080
36
49117754660836.

3) $(19{,}305648)^2 = ?$

Wollte man hier vollständig quadriren, so würde man natürlich 12 Dezimalstellen erhalten; eine so große Anzahl ist wohl in allen Fällen überflüßig. Man bildet daher das Quadrat etwa auf 5 oder 6, überhaupt auf eine beliebige kleinere Anzahl von Dezimalstellen. Dieß hat aber keine weitere Schwierigkeit: man quadrirt nämlich auf die gewöhnliche Weise fort, bis die verlangte Anzahl von Dezimalstellen erreicht ist; von da ab bildet man die einzelnen Abtheilungen des Quadrates nur bis auf die verlangte Dezimalstelle, oder um genauer zu sein, anf eine Stelle weiter, wobei man bloß darauf zu achten hat, die wievielte Dezimalstelle man als zweiten Theil habe und mit der wievielten des ersten man sie noch multipliziren dürfe, um in der letzten Ziffer des Produktes die verlangte Dezimalstelle zu haben. Wenn z. B. das Quadrat auf 6 Dezimalstellen genau sein soll, und man hat eben die 4te Dezimalstelle als zweiten Theil, so darf man, um das doppelte Produkt beider Theile zu bilden, mit der 4ten Dezimalstelle nur mehr die zweite des ersten Theiles multipliziren, jedoch hat man in Gedanken auch noch die dritte Dezimalstelle damit zu multipliziren, um von der dadurch gebildeten 7ten Dezimalstelle das Treffende auf die 6te hinüber zu zählen. In unserm Beispiele soll etwa auf 6 Dezimalstellen das Quadrat genau hergestellt werden; wir haben also:

$(19{,}305648)^2 = 1$

18

$81,$

$\begin{cases} 2a = 38{,}61(0 \\ b = 0{,}0006 \end{cases}$ 114900

19300

$\begin{cases} b = 0{,}0006 \\ b^2 = 0{,}000000(36 \end{cases}$ 25

$\begin{cases} 2a = 38{,}6(112 \\ b = 0{,}00004 \end{cases}$ $23166 = 2ab$

$1544 = 2ab$

$\begin{cases} 2a = 38{,}(6\ldots \\ b = 0{,}000008 \end{cases}$ $309 = 2ab$

$372{,}708044.$

(auf 6 Dezimalstellen)

4) $(3{,}8729834)^2 = 9,$

48

64

$\begin{cases} 2a = 7{,}74(4 \\ b = 0{,}0009 \end{cases}$ 532

49

$\begin{cases} 2a = 7{,}7(458 \\ b = 0{,}00008 \end{cases}$ 15484

$6970 = 2ab$

$\begin{cases} 2a = 7{,}(74\ldots \\ b = 0{,}000003 \end{cases}$ $620 = 2ab$

$23 = 2ab$

$\begin{cases} 2a = (7{,}7 \\ b = 0{,}0000004 \end{cases}$ $3 = 2ab$

$15{,}000000 = 15.$

(auf 7 Dezimalstellen.)

5) $(0{,}283574)^2 = 0{,}04$

32

64

1689

$\begin{cases} 2a = 0{,}56,(70 \\ b = 0{,}00007 \end{cases}$ 2830

$2(5)$

$\begin{cases} 2a = 0{,}5(67\ldots \\ b = 0{,}000004 \end{cases}$ $397 = 2ab$

$23 = 2ab$

$0{,}0804142.$

§. 53.

Zweite Aufgabe.

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2$$
$$+ a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Der Kubus einer zweitheiligen Größe enthält also:

1) den Kubus des ersten Theils (a^3),
2) das dreifache Produkt aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweiten ($3a^2b$),
3) das dreifache Produkt aus dem ersten Theile in das Quadrat des zweiten ($3ab^2$).
4) den Kubus des zweiten Theiles (b^3).

Hinsichtlich der Anwendung dieser Regel auf mehrgliedrige Aggregate wird sich hier auf das bezogen, was in ähnlichem Betreffe bereits beim Quadrate aus einander gesetzt worden ist; demgemäß ist:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a+b+c)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 . c + 3(a+b)c^2 + c^3$;

$(a+b+c+d)^3 =$

$= (a+b+c)^3 + 3(a+b+c)^2 . d + 3(a+b+c) . d^2 + d^3$;

$(a+b+c+d+e)^3 =$

$= (a+b+c+d)^3 + 3(a+b+c+d)^2 . e + 3(a+b+c+d) . e^2 + c^3$.

Aus dieser Darstellung der Kuben mehrgliedriger Aggregate geht zugleich hervor, daß der Kubus des vorausgehenden ersten Theiles vermehrt wird

durch ein 2tes Glied um $1+1+1 = 3$ Glieder;
„ „ 3 „ „ „ $3+2+1 = 6$ „
„ „ 4 „ „ „ $6+3+1 = 10$ „
„ „ 5 „ „ „ $10+4+1 = 15$ „ u. s. w., so daß

der Kubus eines 2gliedrigen Aggregates $1+3 = 4$ Glieder enthält,
„ „ „ 3 „ „ „ $4+6 = 10$ „ „
„ „ „ 4 „ „ „ $10+10 = 20$ „ „
„ „ „ 5 „ „ „ $20+15 = 35$ „ „
u. s. w. *)

*) Die hier vorkommenden Zahlenreihen, nämlich 1, 1, 1, 1 ... — 1, 2, 3, 4 ... —, 1, 3, 6, 10 ... —, 1, 4, 10, 20, 35 ... — bilden sogenannte Progressionen und zwar beziehungsweise der 0ten, 1ten, 2ten und 3ten Ordnung.

Beispiele:

1) $\left(\frac{5x^2}{4y} - \frac{3y^2}{5x}\right)^3 = \frac{125x^6}{64y^3} - \frac{45x^3}{16} + \frac{27y^3}{20} - \frac{27y^6}{125x^3}$.

2) $\left(3a\sqrt[3]{a^2b} - 2\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^3 =$

$= 27a^5b - 54a^4b\sqrt[12]{ab^2} + 36a^3b\sqrt[6]{ab^2} - 8a^2b\sqrt[4]{ab^2}$.

Nebenrechnung.

$\left(3a\sqrt[3]{a^2b}\right)^3 = 27a^3 . a^2b = 27a^5b$;

$3 \times \left(3a\sqrt[3]{a^2b}\right)^2 \times -2\sqrt[4]{a^3b^2} = -54a^2\sqrt[3]{a^4b^2} \times \sqrt[4]{a^3b^2} =$

$= -54a^2\sqrt[12]{a^{25}b^{11}} = -54a^4b\sqrt[12]{ab^2}$;

$9a\sqrt[3]{a^2b} \times \left(-2\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^2 = 9a\sqrt[3]{a^2b} \times 4\sqrt[2]{a^3b^2} =$

$= 36a\sqrt[6]{a^{13}b^8} = 36a^3b\sqrt[6]{ab^2}$;

$\left(-2\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^3 = -8\sqrt[4]{a^9b^6} = -8a^2b\sqrt[4]{ab^2}$.

3) $(4a - 5b + 6c - 7d)^3 =$

$64a^3 - 240a^2b + 300ab^2 - 125b^3 + 288a^2c - 720abc +$
$+ 450b^2c + 432ac^2 - 540bc^2 + 216c^3 - 336a^2d +$
$+ 840abd - 525b^2d - 1008acd + 1260bcd - 756c^2d +$
$+ 588ad^2 - 735bd^2 + 882cd^2 - 343d^3$.

4) $(6x^3 + 8x - 7x^{-1})^3 =$

$= 216x^9 + 864x^7 + 1152x^5 + 512x^3$
$- 756x^5 - 2016x^3 - 1344x$
$+ 882x + 1176x^{-1} - 343x^{-3}$

$216x^9 + 864x^7 + 396x^5 - 1504x^3 - 462x + 1176x^{-1} - 343x^{-3}$.

5. $\left(\frac{4x^2}{5y} - \frac{5xy}{6} - 6y^3 + \frac{2y^5}{3x}\right)^3 =$

$= \frac{64x^6}{125y^3} - \frac{8x^5}{5y} + \frac{5x^4y}{3} - \frac{125x^3y^3}{216} - 90xy^7 - 216y^9$

$+ \frac{288x^4y}{25} + 24x^3y^3 - \frac{25x^2y^5}{2} + \frac{1603xy^7}{90} + 20y^9 + \frac{72y^{11}}{x}$

$+ \frac{432x^2y^5}{5} + \frac{32x^3y^5}{25} - \frac{8x^2y^7}{3} + \frac{16y^9}{15} - \frac{10y^{11}}{9x} - \frac{8y^{13}}{x^2}$

$+ \frac{739x^4y}{75} + \frac{133387x^3y^3}{5400} + \frac{213x^2y^5}{30} - \frac{9703xy^7}{90} - \frac{2924y^9}{15} - \frac{638y^{11}}{9x} + \frac{8y^{13}}{x^2}$

$+ \frac{27x^3}{8y^{15}} + \frac{27x^2}{8y^{13}}$

Anmerkung. Die Nebenrechnung für die Bildung des Quadrates des ersten Theiles werde abseits und so angelegt, daß man mit jedem neu hinzukommenden 2ten Theile in derselben nur fortfahren dürfe, nämlich:

$$\left(\frac{4x^2}{5y} - \frac{5xy}{6} - 6y^3 \ldots\right)^2 = \frac{16x^4}{25y^2} - \frac{4x^3}{3} + \frac{25x^2y^2}{36}$$

$$- \frac{48x^2y^2}{5} + 10xy^4 + 36y^6$$

$$\frac{16x^4}{25y^2} - \frac{4x^3}{3} - \frac{1603x^2y^2}{180} + 10xy^4 + 36y^6$$

Aus den beiden vorhergehenden Aufgaben ersieht man, daß bei symmetrischen Aggregaten das Aggregat des Kubus mit der Bildung je einer weitern Abtheilung bloß um Ein Glied fortschreitet; da nun für jedes neu hinzukommende Glied drei weitere Abtheilungen zu bilden sind, so wird der Kubus

eines 2gliedrigen symmet. Aggregates $1+3=4$ Glieder enthalten,
" 3 " " " $1+3+3=7$ " "
" 4 " " " $1+3+3+3=10$ " " u. s. w.

Anmerkung. Es ist nicht uninteressant, die Zahlenreihen zu vergleichen, welche die Zunahme der Glieder in der 1ten, 2ten und 3ten Potenz von Aggregaten ausdrücken. Wir haben nämlich:

a) bei nicht symmetrischen Aggregaten

für die 1te Potenz die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5... (eine Reihe d. 1ten Ordnung),
" " 2te " " " 1, 3, 6, 10, 15... (" " " 2ten "),
" " 3te " " " 1, 4, 10, 20, 35... (" " " 3ten ");

b) bei symmetrischen Aggregaten

für die 1te Potenz die Zahlen: 1, 2, 3, 4, 5...,
" " 2te " " " " 1, 3, 5, 7, 9...,
" " 3te " " " " 1, 4, 7, 10, 13...,

lauter Reihen der ersten Ordnung, aber für die 1te Potenz mit der Differenz 1, für die 2te mit 2, für die 3te mit 3.

§. 54.

Die Beobachtung, daß bei symmetrischen Aggregaten der Kubus mit jeder neuen Abtheilung bloß um Ein Glied fortschreitet, gibt uns die Regel an die Hand, nach welcher Zifferzahlen, die eben auch symmetrische Aggregate sind, kubirt werden, wobei wir hinsichtlich der weitläufigeren Ableitung dieser Regel einfach auf die entsprechende Ableitung im vorhergehenden Paragraph verweisen. Die Regel selbst ist:

„Man erhebe die einzelnen Ziffern von vorneherein ohne Rücksicht auf ihren Lokalwerth nach der für die Aggregate aufgestellten Regel zum Kubus, bemerke aber, daß man mit jeder weiteren Abtheilung um eine Zifferstelle rechts hinauszurücken habe."

Hinsichtlich der Abkürzungen beim Kubiren von Dezimalbrüchen gilt dasselbe, was in diesem Betreffe beim Quadrate gesagt worden ist, nur ist natürlich wegen der komplizirteren Rechnung hier noch größere Aufmerksamkeit nöthig als dort.

Beispiele.

1) $(31645)^3 = 27$

2	791			
1	729	8		
	33	48		
		216		
	119	827	2	
		151	68	
			64	
	15	016	344	0
		2	373	00
				125
31	689	493	661	125.

Nebenrechnung für a^2:

$(3164..)^2 =$

$= 961$

372

36

99856

2528

16

10010896

2) $2^{54} = (2^2)^{27} = 4^{27} = (4^3)^9 = 64^9 = \left((64)^3\right)^3 =$

$= (262144)^3 = 18014\ 398509\ 481984.$

$(64^3) = 216$

432

288

64

262144.

$(262144)^3 =$	8				
	7	2			
	2	16			
		216			
		405	6		
		3	128		
		20	593	2	
			7	861	
		8	243	569	2
			1	258	08
					64
			824	608	555	2
				12	582	72
						64
18	014	398	509	481	984.	

Nebenrechnung für a^2:

$(26214..)^2 = 4$

24

36

676

1044

68644

5241

6869641

20968

16

687173796

(auf 6 Dezimalstellen.)

3) $(2{,}5198421)^3 = 8,$
60
150
125
1875
751
$170103 = 3a^2b$ $\left\{\begin{array}{l} 3ab^2 = 602(4 \\ 7(5 \end{array}\right.$
$611 = \ldots\ldots$ $+b^3 = \quad (729$
$15229 = 3a^2b$ 611
$4 = 3ab^2$
$762 = 3a^2b$
$38 = 3a^2b$
$2 = 3a^2b$

$16{,}000000 = 16.$

Nebenrechnung für a^2: für $3a^2b$ und $3ab^2$:

$(2{,}5198\ldots)^2 =$

4 $\left\{\begin{array}{l} 3a^2 = 18{,}900(3 \\ b = 0{,}009 \end{array}\right.$
20
25
6,25 $\left\{\begin{array}{l} 3a = 7{,}(5(3 \\ b^2 = 0{,}000081 \end{array}\right.$
501
6,3001 $\left\{\begin{array}{l} 3a^2 = 19{,}03(59 \\ b = 0{,}0008 \end{array}\right.$
452
6,3453 $\left\{\begin{array}{l} 3a = (7{,}5 \\ b^2 = 0{,}00000064 \end{array}\right.$
40
6,3493 $\left\{\begin{array}{l} 3a^2 = 19{,}0(48 \\ b = 0{,}00004 \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} 3a^2 = 19{,}(0 \\ b = 0{,}000002 \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} 3a^2 = 1(9 \\ b = 0{,}0000001. \end{array}\right.$

§. 55.

Dritte Aufgabe.

$$\sqrt[2]{a^2 + 2ab + b^2} = a + b,$$

d. h. man stellt die zweite oder Quadratwurzel aus einem Aggregate her (wobei vorausgesetzt ist, daß dasselbe auch wirklich ein Quadrat und so geordnet sei, wie es beim Quadriren entstanden) nach folgender Regel:

1) Man ziehe die Quadratwurzel aus dem ersten Gliede, so ist diese das erste Glied der gesuchten Wurzel, nämlich $\sqrt[2]{a^2} = a$;

2) hat man das Quadrat des ersten Theiles (der natürlich im Verlaufe der Rechnung auch mehrgliedrig wird) hinweggeschafft, **was also zu geschehen hat,** so reicht das doppelte Produkt des ersten und zweiten Theiles

a) bei symmetrischen Aggregaten um ein Glied weiter, überhaupt aber, also auch

b) bei nicht symmetrischen liegt es in so vielen nächstfolgenden Gliedern, als der bereits gefundene oder erste Theil der Wurzel Glieder enthält;

3) aus dem so bestimmten doppelten Produkte beider Theile erhält man nun den zweiten Theil, indem man es durch das Doppelte des ersten Theiles dividirt, nämlich $\frac{2ab}{2a} = b$.

Anmerkung 1. Natürlich hat man die unter 2) und 3) angegebenen Operationen, nämlich das Hinwegschaffen des Quadrates des ersten Theiles und die Herstellung des zweiten durch die vorgeschriebene Division so lange zu wiederholen, bis bei 2) kein Rest mehr bleibt und sonach durch 3) kein weiterer zweiter Theil zu erhalten, also die ganze Wurzel gefunden ist.

Anmerkung 2. Der Forderung, daß des Aggregat richtig, d. h. so geordnet sei, wie es beim Quadriren entstanden ist, kann, wo es ursprünglich auch nicht der Fall ist, sowohl bei symmetrischen als bei nicht symmetrischen Aggregaten leicht Genüge gethan werden. Bei den ersteren nämlich hat man bloß die Glieder nach den steigenden oder fallenden Potenzen irgend eines der vorkommenden Buchstaben-Faktoren zu ordnen; bei den letztern aber, deren Glieder

ja durch Summation nicht verändert sind, ist jedes der Glieder, welche Quadrate sind, als solches leicht zu erkennen, so daß die einzelnen Glieder der Wurzel, abgesehen von ihren Zeichen, schon hieraus bestimmt werden könnten, jedenfalls aber jede beliebige Ordnung des Quadrat-Aggregates ohne alle Schwierigkeit hergestellt werden kann.

Etwas anders gestaltet sich die Sache bei den Zifferzahlen. Zwar sind diese, wie sich von selbst versteht, immer richtig geordnet, aber man weiß nicht einmal so ohne Weiteres, in welchen Ziffern das Quadrat des ersten Theiles liegt, sondern muß hierauf erst in folgender Weise schließen:

Die Zifferstelle der Einheiten kann nur von einem Quadrate kommen, denn das doppelte Produkt beider Theile endigt nie mit einer Einheit.*) Mithin kommt die Zifferstelle der Zehner von einem doppelten Produkte, die der Hunderter wieder von einem Quadrate u. s. w.; ebenso abwärts die Zehntel von einem doppelten Produkte beider Theile, die Hundertel von einem Quadrate u. s. w. Daher die bekannte Regel, daß man, ehe man aus einer Zifferzahl die Wurzel zieht, dieselbe erst von der Stelle der Einheiten angefangen in Klassen von je zwei Zifferstellen abtheilt. Jede dieser Abtheilungen ist in ihrer ersten Ziffer aus dem doppelten Produkte eines zweiten Theiles in den vorhergehenden ersten, in der zweiten Ziffer aber aus dem Quadrate eben dieses zweiten Theiles — die erste Abtheilung jedoch, für welche ein vorhergehender erster Theil, und daher auch ein doppeltes Produkt dieses Theiles in den folgenden nicht vorhanden ist, bloß aus einem Quadrate, natürlich dem des ersten Theiles hervorgegangen. Das nächst kleinere Quadrat also, welches in der durch diese erste Abtheilung dargestellten Zahl enthalten ist, ist das Quadrat des ersten Theiles, wornach der erste Theil selbst und vermittelst dessen, da man weiß, daß das doppelte Produkt beider Theile um eine Zifferstelle weiter reicht, auf die bekannte Weise der zweite Theil gefunden wird u. s. w.

---

*) Bildet nämlich etwa eine Einheit den zweiten Theil, so ist der erste durch Zehner ausgedrückt und das doppelte Produkt beider Theile gibt wieder Zehner, aber keine Einheiten; oder wäre der zweite Theil ein Zehntel, so bestünde der erste aus Einheiten, das Produkt aber gäbe Zehntel, also wieder nicht Einheiten.

Beispiele.

1) $\sqrt[2]{28cx^3+\frac{49c^2}{16}-\frac{21mcf}{2}+64x^6-48mfx^3+9m^2f^2}=$

$\sqrt[2]{\left(9m^2f^2-\frac{21mcf}{2}+\frac{49c^2}{16}-48mfx^3+28cx^3+64x^6\right)}=3mf-\frac{7}{4}c-8x^3.$

$9m^2f^2$

$\underline{(-)\quad\quad\quad}$

$-\frac{21mcf}{2}$

$:\left(6mf-\frac{7}{4}c\right)$ *)

$-\frac{21mcf}{2}+\frac{49}{16}c^2$

$\underline{(+)\qquad(-)}$

$-48mfx^3+28cx^3$

$:\left(6mf-\frac{7}{2}c-8x^3\right)$

$-48mfx^3+28cx^3+64x^6$

$\underline{(+)\qquad(-)\qquad(-)}$

0

2) $\sqrt[2]{\frac{9x^4}{16y^2}-\frac{3x^3}{5y^3}-\frac{46x^2}{25y^4}+\frac{16x}{15y^5}+\frac{16}{9y^6}}=\frac{3x^2}{4y}-\frac{2x}{5y^2}-\frac{4}{3y^3}.$

$\frac{9x^4}{16y^2}$

$\underline{(-)\quad\quad}$

$-\frac{3x^3}{5y^3}$

$:\left(\frac{3x^2}{2y}-\frac{2x}{5y^2}\right)$

$-\frac{3x^3}{5y^3}+\frac{4x^2}{25y^4}$

$\underline{(+)\qquad(-)}$

$-\frac{2x^2}{y^4}+\frac{16x}{15y^5}$

$:\left(\frac{3x^2}{2y}-\frac{4x}{5y^2}-\frac{4}{3y^3}\right)$

$-\frac{2x^2}{y^4}+\frac{16x}{15y^5}+\frac{16}{9y^6}$

$\underline{(+)\qquad(-)\qquad(-)}$

0

*) Schreibt man, wie hier, an den als Divisor gebrauchten doppelten ersten Theil sogleich den gefundenen zweiten, so wird offenbar durch Multiplikation

3) $\sqrt[2]{4|81|89|03|04} = 21952$.

4
81*)
: (41)
41
4089
: (429)
3861
22803
: (4385)
21925
87804
: (43902)
87804
0

§. 56.

In den bisherigen Aufgaben waren die Radikande durchaus wirkliche Quadrate; aber — wie wir um der Unbestimmtheit unserer Zahlen willen auch Differenzen zulassen mußten, deren Minuend den Subtrahend keineswegs als Summanden, oder Quotienten, deren Dividend den Divisor nicht als Faktor enthielt, aber gerade hiedurch auf zwei höchst wichtige Arten von Zahlen, die negativen Zahlen nämlich und die Brüche geführt wurden —, ebenso können wir auch hier nicht umhin, auch solche Aggregate als Radikande zuzulassen, welche keine Quadrate sind, und wieder werden wir dabei auf eine eigenthümliche Art von Zahlen stossen. Nehmen wir als einen solchen Radikand eine Zifferzahl, z. B. in $\sqrt[2]{19}$, so

---

dieser beiden Größen mit dem oben gefundenen zweiten Theile das doppelte Produkt beider Theile und das Quadrate des zweiten, also gerade das gebildet, was vom Quadrate des bis jetzt bekannten Theiles der Wurzel noch hinwegzuschaffen ist, weßwegen denn diese Produkte vom gegebenen Quadrate nun auch subtrahirt werden.

*) Man läßt hier, wenigstens anfangs, zur Division ins doppelte Produkt bloß die eine diesem Produkte angehörige Zifferstelle, hier 8, und dann erst zur Subtraktion auch die zweite, vom Quadrate des zweiten Theiles herrührende Zifferstelle, hier 1, herabsetzen.

gewinnen wir am leichtesten eine Vorstellung von der Eigenthümlichkeit solcher Ausdrücke. Die $\sqrt[2]{19}$ ist nämlich offenbar > 4, aber < 5, mithin kann sie nur ein unächter Bruch innerhalb dieser Gränzen sein; — dieser Bruch aber, zum Quadrate erhoben, soll wieder die Zahl 19 geben; das nun ist nicht möglich, denn ein Bruch, mit sich selbst multiplizirt, gibt immer wieder einen Bruch, also ist unsere $\sqrt[2]{19}$ auch kein Bruch. Weil nun eine solche Wurzel, indem sie weder eine ganze Zahl noch ein Bruch ist, weder zur absoluten, noch zu irgend einer relativen Einheit ein bestimmbares Verhältniß hat, so heißt man sie eine irrationale Zahl.

Aber wenn auch solche Irrational-Zahlen vollkommen zu bestimmen unmöglich ist, so können wir doch Zahlen angeben, die ihnen nahe kommen und zwar so nahe, als wir dieß überhaupt nur wünschen mögen.

Darauf führt uns die Betrachtung des vierten Beispieles in §. 52. Hier wird $(3{,}8729834)^2 = 15$ gefunden, weil man eben dieß Quadrat bloß auf 6 Dezimalstellen verlangt hatte, an diesen verlangten Dezimalstellen aber gerade Nullen herausgekommen waren; in der That aber ist $(3{,}8729834)^2 = 15{,}000000\ldots$, wo an der Stelle dieser Punkte lauter Ziffer zu stehen hätten, welche eben von uns vernachläßigt worden sind. Wäre nun umgekehrt $\sqrt[2]{15}$ verlangt, so ist diese keineswegs $= 3{,}8729834$, sondern sie ist, weil 15 kein Quadrat, eine Irrational-Zahl; aber weil 15 sehr nahe $= 15{,}000000\ldots$, so ist auch $\sqrt[2]{15}$ sehr nahe $= \sqrt[2]{15{,}000000\ldots}$, also $\sqrt[2]{15}$ sehr nahe $= 3{,}8729834$. Wie nun in diesem Falle, so setzt man allgemein bei Irrational-Zahlen an die Stelle des Radikands eine Zahl, welche von demselben nur in jenen Dezimalstellen differirt, auf die man ohnehin nicht mehr reflektirt, d. h. man hängt dem Radikande so viele Nullen an, auf wieviele Dezimalstellen man die Irrational-Zahl genau ermitteln will, und zieht nun hieraus mit denselben Abkürzungen die Quadratwurzel, mit welchen wir oben abgekürzt zum Quadrate erhoben haben, welche Wurzel nun zwar nicht der Irrational-Zahl gleich ist, aber doch auf soviele Dezimalstellen mit ihr übereinstimmt, als man dem Radikande Nullen angehängt hat.

Ebenso wie die irrationalen Quadratwurzeln aus Zifferzahlen

behandelt man auch die aus Buchstaben-Aggregaten, welche nicht wirkliche Quadrate sind, wie z. B. $\sqrt[2]{a^2 + b}$. Man denkt sich nämlich an die Stelle der fehlenden Glieder Nullen und radizirt nun, als wenn das Quadrat vollständig wäre. Da hiebei das Quadrat des ersten Theiles etwa nur für 1 oder 2 Glieder, nie aber für alle, im Radikande wirklich vorhanden ist, so bleiben bei der Subtraktion immerfort Glieder übrig, in welchen wieder das doppelte Produkt beider Theile liegt, und woraus sonach fort und fort ein neuer zweiter Theil sich finden läßt, so daß sich die gesuchte Wurzel als eine Reihe darstellt, deren Glieder man beliebig weit fortsetzen, nie aber vollständig entwickeln kann. In wie weit aber diese Reihe dem gegebenen Wurzelausdrucke $\sqrt[2]{a^2 + b}$ entspricht, können wir erst, wenn wir dieselbe, wie im folgenden dritten Beispiele, entwickelt haben, eigentlich beurtheilen.

Beispiele.

1) $\sqrt[2]{19} = \sqrt[2]{19,|00|00|00} = 4,358899\ldots\ldots$

16

300

:(8,3)

249

5100

:(8,65)

4325

77500

:(8,708)

69664

7836

:(8,71(68)

6973

863

:(8,7(17..)

785

78

:(8,(7...)

78

—

2. $\sqrt[2]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[2]{3{,}375} = \sqrt[2]{3{,}|37|50|00} = 1{,}837117\ldots$

1
237 :(2,8)
224
1350 :(3,63)
1089
26100 :(3,667)
25669
431 :(3,67(4.
367
64 :(3,6(7.
37
27 :(3,(67.
26
1...

oder $\sqrt[2]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[2]{\frac{27}{8}} = \sqrt[2]{\frac{54}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt[2]{54{,}|00|00|00} =$

$= \frac{1}{4} \times 7{,}348469\ldots = 1{,}837117\ldots$

49
500 :(143)
429
7100 :(14,64)
5856
124400 :(14,688)
117504
6896 :(14,69(6..
5878
1018 :(14,6(96..
882
136 :(14,69...
132
4....

3) $\sqrt[2]{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} - \frac{5b^4}{128a^7} + \cdots$

$$\begin{array}{l}
\underline{(-)\ a^2} \\
\quad +b \\
\quad :\left(2a+\frac{b}{2a}\right) \\
\quad +b+\frac{b^2}{4a^2} \\
\underline{(-)\quad (-)\ \frac{b^2}{4a^2}} \\
\quad -\frac{b^2}{4a^2} \\
\quad :\left(2a+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{8a^3}\right) \\
\quad -\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^3}{8a^4}+\frac{b^4}{64a^6} \\
\underline{(+)\quad (+)\quad (-)} \\
\quad +\frac{b^3}{8a^4}-\frac{b^4}{64a^6} \\
\quad :\left(2a+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{4a^3}+\frac{b^3}{16a^5}\right) \\
\quad +\frac{b^3}{8a^4}+\frac{b^4}{16a^6}-\frac{b^5}{64a^8}+\frac{b^6}{256a^{10}} \\
\underline{(-)\quad (-)\quad (+)\quad (-)} \\
\quad -\frac{5b^4}{64a^6}+\frac{b^5}{64a^8}-\frac{b^6}{256a^{10}} \\
\quad :\left(2a+\frac{b}{a}-\frac{b^2}{4a^3}+\frac{b^3}{8a^5}-\frac{5b^4}{128a^7}\right) \\
\quad -\frac{5b^4}{64a^6}-\frac{5b^5}{128a^8}\ \text{u. s. w.} \\
\underline{(+)\quad (+)} \\
\quad +\frac{7b^5}{128a^8}\ \text{u. s. w.}
\end{array}$$

Erhebt man umgekehrt das hier gefundene Aggregat zum Quadrate, so erhält man, wenn man das Quadrat nur auf so viele Glieder entwickelt, als deren die Wurzel hat, so viele oder wenige diese auch seien, jedesmal wieder den gegebenen Radikand; daraus aber folgt:

1) die Glieder der Wurzelreihe gehören, so viele ihrer auch entwickelt werden, also in's Endlose, der $\sqrt[2]{a^2+b}$ an; aber

2) sie stellen nie diese Wurzel selbst dar, indem ja ihr voll-

ständiges Quadrat, das aus $(2n+1)$ Gliedern besteht, wenn die Wurzel deren n hat, bereits mit seinen ersten n Gliedern dem Radikande (a^2+b) gleich ist, also denselben immer um die übrigen $(n+1)$ Glieder übertrifft.

Ob übrigens die entwickelte Wurzelreihe dem eigentlichen Werthe der Wurzel sich mehr oder weniger nähere, hängt offenbar von dem Verhältnisse ab, welches zwischen b und a besteht: je kleiner nämlich b und je größer a ist, um so eher werden die Glieder der Reihe sehr klein, oder, wie man gewöhnlich sagt, um so schneller convergirt die Reihe, was übrigens auch noch durch die Coëffizienten befördert wird, die in den Divisoren ungleich größer als in den Dividenden sind.

$$\left(a+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^3}+\frac{b^3}{16a^5}-\frac{5b^4}{128a^7}\right)^2 =$$

$$= a^2+b+\frac{b^2}{4a^2}$$
$$-\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^3}{8a^4}+\frac{b^4}{64a^6}$$
$$+\frac{b^3}{8a^4}+\frac{b^4}{16a^6}\cdots$$
$$-\frac{5b^4}{64a^6}\cdots$$

$$a^2+b$$

§. 57.

Vierte Aufgabe.

$$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} = a+b\,,$$

d. h. man stellt die dritte oder die Kubikwurzel aus einem Aggregate (vorausgesetzt, daß dasselbe wirklich ein Kubus und so geordnet sei, wie es beim Kubiren entstanden) nach folgender Regel her:

1) Man ziehe die Kubikwurzel aus dem ersten Gliede, so ist diese das erste Glied der gesuchten Wurzel, nämlich $\sqrt[3]{a^3}=a$;

2) hat man den Kubus des ersten Theiles, der natürlich im Verlaufe der Rechnung auch mehrgliedrig wird, hinweggeschafft, **was also zu geschehen hat**, so reicht das dreifache Produkt aus dem Quadrate des ersten Theiles in den zweiten

a) bei symmetrischen Aggregaten um ein Glied weiter,

b) bei nicht symmetrischen aber liegt dasselbe in den

nächsten 1, 3, 6... Gliedern, je nachdem die bereits gefundene Wurzel 1, 2, 3 ... Glieder hat;

3) aus dem so bestimmten dreifachen Produkte des Quadrates des ersten Theiles in den zweiten wird der zweite Theil gefunden, indem man dieses Produkt durch das dreifache Quadrat des ersten Theiles dividirt, nämlich $\frac{3a^2b}{3a^2} = b$.

Anmerkung 1. Natürlich müssen die unter 2) und 3) angegebenen Operationen so lange wiederholt werden, bis bei 2), d. h. beim Hinwegschaffen des Kubus des ersten Theiles kein Rest mehr bleibt und sonach auch durch 3) kein weiterer Theil der Wurzel mehr erhalten werden kann, die Wurzel somit vollständig gefunden ist.

Anmerkung 2. Was bei der Quadratwurzel über das Ordnen der Aggregate gesagt worden ist, gilt ebenso auch hier. Hinsichtlich der Zifferzahlen hat man Folgendes zu beachten: die Stelle der Einheiten kann nur von einem Kubus, nämlich dem wieder einer Einheit herrühren $[(b^0)^3 = b^0]$; mithin kommt die der Zehner von dem dreifachen Produkte des ersten Theiles in das Quadrat des zweiten oder kurz von einem $3ab^2$, die der Hunderter von einem $3a^2b$, die der Tausender wieder von einem Kubus (a^3) u. s. w., hingegen die Stelle der Zehntel von einem $3a^2b$, die der Hundertel von $3ab^2$, die der Tausendel von b^3 u. s. w. Man sieht also, daß, wenn man die Zahl von der Stelle der Einheiten angefangen sowohl rechts als links in Klassen von je drei Zifferstellen abtheilt, jede solche Klasse in ihrer ersten Ziffer von einem $3a^2b$, in der zweiten von $3ab^2$, in der dritten von b^3 herrührt; mithin kann die erste Klasse, für welche ein vorhergehender erster Theil (a) nicht vorhanden ist, und in welcher ebendeßwegen kein $3a^2b$ und kein $3ab^2$ enthalten sein kann, bloß den Kubus eines und zwar des ersten Theiles, also nicht eigentlich ein b^3, sondern das a^3 enthalten. Der nächst niedere Kubus also, welchen diese Klasse als Eine Zahl gelesen enthält, ist der Kubus des ersten Theiles, woraus sich denn der erste Theil selbst und mit dessen Hilfe nach der gegebenen Regel die folgenden bestimmen lassen.

Anmerkung 3. Was über Irrationalzahlen bei der Quadratwurzel weitläufig erörtert worden, gilt ganz in derselben Weise auch für die irrationalen Kubikwurzeln, d. h. für Kubikwurzeln, deren Radikand kein Kubus. Ebenso geschieht sowohl die annähernde Werthbestimmung solcher Wurzeln bei Zifferzahlen, als auch ihre Entwicklung in unendlichen Reihen bei Aggregaten ganz wie bei den entsprechenden irrationalen Quadratwurzeln.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{(27m^3f^3 - 27m^2nf^2x + 9mn^2fx^2 - n^3x^3 + 54m^2f^2xy - 36mnfx^2y + 6n^2x^3y + 36mfx^2y^2 - 12nx^3y^2 + 8x^3y^3)} = 3mf - nx + 2xy.$

$27m^3f^3$

$(-)$

$-27m^2nf^2x$

$:(27m^2f^2)$

$-27m^2nf^2x + 9mn^2fx^2 - n^3x^3$

$(+)\quad(-)\quad(+)$

$+54m^2f^2xy - 36mnfx^2y + 6n^2x^3y$

$:(27m^2f^2 - 18mnfx + 3n^2x^2)$

$+54m^2f^2xy - 36mnfx^2y + 6n^2x^3y + 36mfx^2y^2 - 12nx^3y^2 + 8x^3y^3$

$(-)\quad(+)\quad(-)\quad(-)\quad(+)\quad(-)$

0

2) $\sqrt[3]{27a^9 - 108a^8 + 9a^7 + 296a^6 - 15a^5 - 300a^4 - 125a^3} = 3a^3 - 4a^2 - 5a.$

$27a^9$

$(-)$

$-108a^8$

$:(27a^6)$

$-108a^8 + 144a^7 - 64a^6$

$(+)\quad(-)\quad(+)$

$-135a^7 + 360a^6 - 15a^5$

$:(27a^6 - 72a^5 + 48a^4)$

$-135a^7 + 360a^6 - 240a^5$

$(+)\quad(-)\quad(+)$

$+225a^5 - 300a^4 - 125a^3$

$(-)\quad(+)\quad(+)$

0

3) $\sqrt[3]{(8a^6b^3 - 36a^5b^4 + 6a^4b^5 + 177a^3b^6 - 192a^2b^7 - 249ab^8 + 446b^9 + 15a^{-1}b^{10} - 300a^{-2}b^{11} + 125a^{-3}b^{12})} =$

$= 2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 + 5a^{-1}b^4.$

$8a^6b^3$

(−)

$-36a^5b^4$

$:(12a^4b^2)$

$-36a^5b^4 + 54a^4b^5 - 27a^3b^6$

(+) (−) (+)

$-48a^4b^5 + 204a^3b^6 - 192a^2b^7$

$:(12a^4b^2 - 36a^3b^3 + 27a^2b^4)$

$-48a^4b^5 + 144a^3b^6 - 108a^2b^7$

(+) (−) (+)

$+96a^2b^7 - 144ab^8 - 64b^9$

(−) (+) (+)

$+60a^3b^6 - 180a^2b^7 - 105ab^8 + 510b^9 + 15a^{-1}b^{10}$

$:(12a^4b^2 - 36a^3b^3 - 21a^2b^4 + 72ab^5 + 48b^6)$

$+60a^3b^6 - 180a^2b^7 - 105ab^8 + 360b^9 + 240a^{-1}b^{10}$

(−) (+) (+) (−) (−)

$+150b^9 - 225a^{-1}b^{10} - 300a^{-2}b^{11} + 125a^{-3}b^{12}$

(−) (+) (+) (−)

0

Nebenrechnung für a^2:

$$(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3 \ldots)^2 =$$
$$= 4a^4b^2 - 12a^3b^3 + 9a^2b^4$$
$$- 16a^2b^4 + 24ab^5 + 16b^6$$
$$4a^4b^2 - 12a^3b^3 - 7a^2b^4 + 24ab^5 + 16b^6$$

4) $\sqrt[3]{358|637|394|862|592} = 71048.$

343

15637 *)
:(147)
147
211

14911

726394
:(15123)
000

726394862
:(1512300)
6049200
34080
64

605260864

121133998592
:(151400448)
1211203584
1363968
512

121133998592

0

Nebenrechnung für a^3:

$(7104\ldots)^3 = 49$
141

504100
5680
16

50466816

*) Man lasse hier anfangs nur die eine Ziffer herabsetzen, welche mit zu $3a^2b$ gehört, hier 6, und erst bei der Subtraktion des Kubus der bereits gefundenen Wurzel auch die Ziffern, deren Stellen von $3ab^2$ und b^3 herrühren, hier 3 und 7.

5) $\sqrt[3]{0,|074|088} = 0,42$ *)

64

10088

:(48)

96

488

10088

0

6) $\sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{11,|000|000} = 2,223980.$

8

3000

:(12)

24

248

2648

352000

:(14,52)

2904

2648

293048

58952

:(14,785(2)

44356

60

44416

14536

(14,82(5..)

13342

5 — [3a = 6,66...; $b^2 = 0,000009$]

13347

1189

:(14,8(37)

1187

2

:(14,(8)

0

2...

$(2,2239...)^3 = 4,84$

884

4,928(4

133

4,94(17

40

4,9(457

[3a = 6,66...; $b^2 = 0,00000081$]

*) In $0,074 = \frac{74}{1000}$ liegt der Kubus $\frac{64}{1000}$, deſſen Wurzel $\frac{4}{10} = 0,4$ iſt.

7) a. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{0{,}5} = \sqrt[3]{0{,}|500|000} = 0{,}793701.$

343

157000 $(0{,}7937..)^3 = 0{,}49$

:(1,47) 126

1323 81

1701 0,624(1

729 47

150039 0,62(88

6961 11

:(1,872(3) 0,6(299

5617

21 [3a = 2,37; b² = 0,000009]

5638

1323

:(1,88(6)

1320

1 [3a = 2,3..; b² = 0,00000049]

1321

2

:(1,8(9)

0

2

:(1,(89)

2

0

b. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{4}{8}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4,|000|000} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}587401 =$

$= 0{,}793701$ nahezu. $\frac{1}{3000}$

:(3)
15
75
125
2375
625000
:(6,75)
5400
2880
512
569312
55688
:(7,489(2)
52424
232
52656
3032
:(7,55(5)
3022
10
:(7,5)
0
10
:(7,(5)
8
2...

(1,587 . .)³ = 1,
10
25
2,25
240
64
2,496(4
221
2,51(85

8) $\sqrt[3]{a^3+b} = a + \frac{b}{3a^2} - \frac{b^2}{9a^5} + \frac{5b^3}{81a^8} - \frac{10b^4}{243a^{11}} + \ldots$

a^3
(−)
$+b$
$:(3a^2)$
$1 + \frac{b^2}{3a^3} + \frac{b^3}{27a^6}$
(−) (−) (−)
$-\frac{b^2}{3a^3} - \frac{b^3}{27a^6}$
$:\left(3a^2 + \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{3a^4}\right)$
$-\frac{b^2}{3a^3} - \frac{2b^3}{9a^6} - \frac{b^4}{27a^9}$
(+) (+) (+)
$+\frac{b^4}{27a^9} + \frac{b^5}{81a^{12}} - \frac{b^6}{729a^{15}}$
(−) (−) (+)
$+\frac{5b^3}{27a^6} - \frac{b^5}{81a^{12}} + \frac{b^6}{729a^{15}}$
$:\left(3a^2 + \frac{2b}{a} - \frac{b^2}{3a^4} - \frac{2b^3}{9a^7} + \frac{b^4}{27a^{10}}\right)$
$+\frac{5b^3}{27a^6} + \frac{10b^4}{81a^9} - \frac{5b^5}{243a^{12}}$ u. s. w.
(−) (−) (+)
$-\frac{10b^4}{81a^9} + \frac{2b^5}{243a^{12}} \ldots$
$:(3a^2 + \ldots)$
$-\frac{10b^4}{81a^9} + \ldots$
(+)
u. s. w.

Bildet man von dieser Wurzelreihe den Kubus auf so viele Glieder, als sie deren selbst hat, so viele oder wenige deren auch seien, so erhält man immer wieder den gegebenen Radikand (a^3+b); daraus folgt:

1) die Glieder der Wurzelreihe gehören, so viele derselben auch entwickelt werden, also in's Endlose, der $\sqrt[3]{a^3+b}$ an;

2) aber nie ist diese Reihe der gesuchten Wurzel selbst gleich, weil von ihrem aus $3n+1$ Gliedern bestehenden Kubus bereits

n Glieder dem Radikande gleich sind, also dieser Kubus sich vom gegebenen Radikande um die übrigen $2n+1$ Glieder unterscheidet.

Es ist nämlich:

$$\left(a+\frac{b}{3a^2}-\frac{b^2}{9a^5}+\frac{5b^3}{81a^8}-\frac{10b^4}{243a^{11}}+\ldots\right)^3=$$

$$=a^3+b+\frac{b^2}{3a^3}+\frac{b^3}{27a^6}$$

$$-\frac{b^2}{3a^3}-\frac{2b^3}{9a^6}-\frac{b^4}{27a^9}$$

$$+\frac{b^4}{27a^9}\ldots. \quad \text{(das folgende Glied } 3ab^2 \text{ wäre bereits das 6te, ist also hinwegzulassen)}$$

$$+\frac{5b^3}{27a^6}+\frac{10b^4}{81a^9}+\ldots$$

$$\frac{10b^4}{81a^9}\ldots$$

$$=a^3+b \qquad \ldots.$$

Binomischer Lehrsatz.

§. 58.

Wir haben in dem Vorhergehenden nur spezielle Aufgaben des Potenzirens und Radizirens von Aggregaten, nämlich mit bestimmten Exponenten und Radikatoren, wobei man über die Zahlen 2 und 3 hiefür in der Regel nicht hinausgeht, des Weiteren behandelt. Es erübrigt uns also noch, diese Aufgabe auch allgemein, d. h. mit unbestimmten Exponenten und Radikatoren zu lösen, wozu denn zunächst $(a+b)^n$ entwickelt werden muß. Wir gehen dabei von den einfachsten bestimmten Fällen aus, und indem wir annehmen, daß, was für alle diese bekannten, auch für alle Fälle überhaupt, also allgemein gelte, gelangen wir von den besondern Lösungen unserer Aufgabe zur allgemeinen, wie folgt:

1) $(a+b)^0=1$,
2) $(a+b)^1=a+b$,
3) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,
4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,
5) $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$,
6) $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$.

Aus diesen besondern Potenzreihen müssen nun die Glieder der allgemeinen Reihe entwickelt werden, und zwar

a) mit ihren Potenzen,

b) mit ihren Coëffizienten.

ad a. Was zuerst die Potenzen betrifft, so bemerkt man:

1) alle Glieder der einzelnen Reihen enthalten Produkte aus Potenzen beider Glieder (a und b) des Binoms;

2) der Exponent von a ist überall im ersten Gliede am größten, nämlich = dem Binoms-Exponenten, und nimmt mit jedem folgenden Gliede um 1 ab, bis er im letzten Gliede = 0 ist;

3) umgekehrt ist der Exponent von b im ersten Gliede aller Reihen am kleinsten, nämlich = 0, und nimmt mit jedem folgenden Gliede um 1 zu, bis er im letzten Gliede = dem Binoms-Exponenten ist. Stellen wir nun nach diesen Beobachtungen die Glieder der allgemeinen Reihe, einstweilen noch ohne Coëffizienten, her, so sind sie:

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2 \ldots,\ a^2b^{n-2},\ ab^{n-1},\ b^n,$$

wobei sich zugleich die Anzahl der Glieder $= n+1$ herausstellt.

ad b. Was die Coëffizienten betrifft, so ist:

1) der des ersten Gliedes überall = 1, mithin auch in der allgemeinen Reihe.

2) Gemäß $(a+b)^0 = 1$ ist der Coëffizient des 2ten Gliedes $= 0$, wenn $n = 0$; das ist aber nur dann möglich, wenn er den Faktor n erhält, den er somit enthalten muß, und wie aus den 2ten Gliedern aller folgenden Potenzreihen hervorgeht, auch wirklich und zwar einfach enthält, d. h. ohne Zusatz eines weitern Faktors oder Divisors: der allgemeine Coëffizient des 2ten Gliedes ist daher = n.

3) Gemäß den Gleichungen: $(a+b)^0 = 1$ und $(a+b)^1 = a+b$, ist der Coëffizient des 3ten Gliedes = 0, sowohl wenn $n = 0$, als auch wenn $n = 1$; damit er aber in diesen Fällen $= 0$ werde, muß er sowohl den Faktor n als auch den Faktor $(n-1)$ enthalten. Enthielte er aber diese Faktoren einfach, so wäre für $n = 2$ der Coëff. des 3ten Gliedes $= 2 \cdot (2-1) = 2$,

„ $n = 3$ „ „ „ „ „ $= 3 \cdot (3-1) = 6$,

„ $n = 4$ „ „ „ „ „ $= 4 \cdot (4-1) = 12$ u. s. w.,

während er, wie aus den betreffenden Potenzreihen hervorgeht, der Reihe nach in diesen Fällen 1, 3, 6 ist. Es müssen also, um die

wirklichen Coëffizienten der 3ten Glieder in den angenommenen Fällen herzustellen, obige Produkte noch durch 2 dividirt werden. Mithin ist der allgemeine Coëffizient des 3ten Gliedes $= \frac{n(n-1)}{2}$.

4) Gemäß den drei ersten Potenzreihen, welche alle kein 4tes Glied enthalten, muß der Coëffizient des 4ten Gliedes $= 0$ sein, sowohl wenn $n = 0$ und $n = 1$, als auch wenn $n = 2$; da dieß nur dann stattfindet, wenn er die Faktoren n, $(n-1)$ und $(n-2)$ enthält, so folgt, daß er diese Faktoren zu enthalten habe. Enthielte er sie aber nur einfach, so wäre:

für $n = 3$ der Coëffizient des 4ten Gliedes $= 3.2.1 = 6$,
„ $n = 4$ „ „ „ „ „ $= 4.3.2 = 24$,
„ $n = 5$ „ „ „ „ „ $= 5.4.3 = 60$,

während die wirklichen Coëffizienten in diesen Fällen der Reihe nach 1, 4, 10 sind; um diese wirklichen Coëffizienten zu erhalten, müssen also obige Produkte noch durch 6 dividirt werden. Der allgemeine Coëffizient des 4ten Gliedes ist somit $= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

In der nämlichen Weise werden nun die folgenden Coëffizienten abgeleitet und so ist

der Coëffizient des 5ten Gliedes $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$,
„ „ „ 6ten „ $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$,
allgemein „ rten „ $= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-2))}{1.2.3\ldots(r-1)}$.

Entwickeln wir hienach etwa die Coëffizienten der drei letzten Glieder, so ist der des drittletzten oder $(n-1)$ten folgender:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-1-2))}{1.2.3\ldots(n-1-1)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots3}{1.2.3\ldots(n-2)} = \frac{n(n-1)}{1.2},$$

also gleich dem des 3ten Gliedes von vorne.

Ebenso der Coëffizient des vorletzten oder nten Gliedes:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n-2))}{1.2.3\ldots(n-1)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots2}{1.2.3\ldots(n-1)} = \frac{n}{1},$$

also gleich dem Coëffizienten des 2ten Gliedes.

Endlich ist der des letzten oder $(n+1)$ten Gliedes

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(n+1-2))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1-1)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = 1.$$

Setzen wir nun die gefundenen Coëffizienten mit den oben bereits bestimmten Potenzen zusammen, so ist unsre allgemeine Reihe die folgende:

$$(a+b)^n =$$

$$= a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \ldots \frac{n(n-1)}{1.2}a^2b^{n-2} + \frac{n}{1}.ab^{n-1} + b^n.$$

Ist b negativ, so werden diejenigen Glieder, welche ungerade Potenzen von b enthalten, negativ. Es ist also:

$$(a-b)^n =$$

$$= a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots.$$

Schafft man a^n als gemeinschaftlichen Faktor heraus, so hat man:

$$\left(a \pm b\right)^n =$$

$$= a^n\left(1 \pm \frac{n}{1}.\frac{b}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\left(\frac{b}{a}\right)^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots\right)$$

§. 59.

Anwendungen.

1) Es sei $a = 1$ und $b = 1$, so ist:

a) $(1-1)^n = 0^n = 0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots.$,

d. h. wenn man unsere allgemeinen Coëffizienten abwechselnd positiv und negativ nimmt und sie so summirt, so ist die Summe $= 0$.

b) $(1+1)^n = 2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots.$,

d. h. die Summe unserer allgemeinen Coëffizienten = der nten Potenz der Zahl 2.

Es sei z. B. in a) $n = 6$, so ist:

$$1 - 6 + \frac{6.5}{1.2} - \frac{6.5.4}{1.2.3} + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} - \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5} +$$

$$+ \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6} = 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 =$$

$$= 32 - 32 = 0;$$

oder in b) $n = 7$, so ist:

$$1 + 7 + \frac{7.6}{1.2} + \frac{7.6.5}{1.2.3} + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} + \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} +$$

$$+ \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6} + \frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7} =$$

$$= 1 + 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 128 = 2^7.$$

2) Addirt man die Gleichungen unter a) und b), so erhält man für 2^n einen zweiten Ausdruck, der aus einer kleinern Anzahl von Gliedern bestehend sich schneller ausrechnen läßt. Es ist nämlich:

$$2^n = 2 + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3.4} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3.4.5.6} + \ldots.$$

Es sei hier $n = 7$, wie oben, so haben wir:

$$2^7 = 2 + 7.6 + \frac{7.6.5.4}{3.4} + \frac{7.6.5.4.3.2}{3.4.5.6} =$$

$$= 2 + 42 + 70 + 14 = 128.$$

3) Es sei $a = 3$ und $b = 1$, so ist:

$$(3-1)^n = 2^n =$$

$$= 3^n\left(1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots.\right),$$

woraus $\frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n =$

$$= 1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots.$$

Setzen wir nun aber $a = 3$ und $b = 2$, so erhalten wir:

$$(3-2)^n = 1^n =$$

$$= 3^n\left(1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{2}{3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots.\right),$$

woraus $\frac{1^n}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n =$

$$= 1 - \frac{n}{1}\cdot\frac{2}{3} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \ldots.$$

Wie es sich hier mit den beiden sich gegenseitig zu 1 ergänzenden Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{3}$ verhält, daß nämlich je die nte Potenz des einen sich in einer Reihe steigender Potenzen des andern entwickeln läßt,

ebenso verhält es sich allgemein mit je zwei sich zu 1 ergänzenden Zahlen; es ist nämlich:

$$4)\ \left(\frac{a}{x}\right)^n =$$

$$= 1 - \frac{n}{1}\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\left(1-\frac{a}{x}\right)^3 + \ldots.$$

Es sei hier $\frac{a}{x} = \frac{99}{100}$ und $n = 5$, so haben wir:

$$(0{,}99)^5 = 1 - 5\cdot\frac{1}{100} + \frac{5.4}{1.2}\cdot\frac{1}{10000} - \frac{5.4.3}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1000000} +$$

$$+ \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{100000000} - \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{10000000000} =$$

$$= + 1{,}0000000000 - 0{,}0500000000$$
$$0{,}001 \qquad\quad 0{,}00001$$
$$0{,}00000005 \qquad 0{,}0000000001$$

$$= + 1{,}0010000500 - 0{,}0500100001$$

$= 0{,}9509900499$, welches Resultat mit dem durch fünfmaliges Multipliziren von 0,99 mit sich selbst erhaltenen natürlich völlig übereinstimmt.

5) Kommt es nicht darauf an, eine solche Potenz genau mit allen ihren Ziffern zu kennen, so bietet, wenn der Bruch nicht viel von der Einheit differirt, obige Reihe ein bequemes Mittel, die Potenz auf eine beliebige Anzahl von Dezimalstellen schnell herzustellen, weil dann $1 - \frac{a}{x}$ sehr klein ist und daher die Glieder bald so klein werden, daß sie vernachlässigt werden können. Z. B.

$$\left(\frac{157}{159}\right)^6 = 1 - 6\cdot\frac{2}{159} + \frac{6.5}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{159}\right)^2 - \frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{159}\right)^3 + \ldots =$$

$$= 1 - 6\,.\,0{,}0125786 + 15\,.\,0{,}0001582 - 20\,.\,0{,}0000020 +$$
$$+ 15\,.\,0{,}0000000(25\ldots. =$$
$$= 1 - 0{,}0754716 + 0{,}0023730 - 0{,}0000400 + 0{,}0000004$$

$$= \begin{cases} + 1{,}002373 \\ - 0{,}075511 \end{cases} \Big(\begin{matrix} 4 \\ 6 \end{matrix}, \text{ daher}$$

$$\left(\frac{157}{159}\right)^6 = 0{,}926862.$$

6) Aber auch für solche Brüche, welche > 1, ist unser Binomial-

satz leicht und mit Nutzen anwendbar, so lange sie die Einheit nur um eine kleine Größe übertreffen. So ist z. B.

$$(32)^n = (31+1)^n = 31^n\left(1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{31}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{31}\right)^2+\ldots\right),$$

woraus $\frac{32^n}{31^n} = \left(\frac{32}{31}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{31}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{31}\right)^2+\ldots$

Es sei hier $n = 7$, so haben wir:

$$\left(\frac{32}{31}\right)^7 = 1+7\,.\,0{,}032258+\frac{7.6}{1.2}\,.\,0{,}001040(6)+$$

$$+\frac{7.6.5}{1.2.3}\,.\,0{,}000033(6)+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\,.\,0{,}000001(1)+\ldots. =$$

$$\begin{aligned} &= 1{,}000000\\ &\quad\ 0{,}225806\\ &\quad\ 0{,}021853\\ &\quad\ 0{,}001176\\ &\quad\ 0{,}000038\end{aligned}$$

$$\left(\frac{32}{31}\right)^7 = 1{,}248873.$$

§. 60.

Unserer Ableitung zufolge können wir die Geltung unserer allgemeinen Potenzreihe nur für die Fälle beanspruchen, wo n eine ganze positive Zahl ist. Die höhere Mathematik jedoch weist vermittelst des Differential-Calculs nach, daß dieselbe ganz allgemein, also auch dann wahr sei, wenn n eine negative oder gebrochene Zahl ist, und auch wir sind im Stande, hiefür wenigstens einen Induktionsbeweis zu liefern. Ehe wir aber an diesen Beweis, der für negative und für Bruch-Exponenten gesondert dargestellt wird, wirklich gehen, müssen wir unsere allgemeine Gleichung erst für diese speziellen Voraussetzungen umformen.

Es sei also

1) n eine negative Zahl, dann haben wir:

$$(a+b)^{-n} =$$

$$= a^{-n} - \frac{n}{1}.a^{-(n+1)}b+\frac{n(n+1)}{1.2}a^{-(n+2)}b^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}a^{-(n+3)}b^3+\ldots$$

$$= a^{-n}\left(1-\frac{n}{1}.\frac{b}{a}+\frac{n(n+1)}{1.2}.\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\left(\frac{b}{a}\right)^3+\ldots\right).$$

Anmerkung. Die Umwandlung der vorigen Exponenten und Coëffizienten in die neuen geschieht einfach nach den Regeln der Summation: so wird aus $n(n-1)$, wenn n negativ, $(-n)(-n-1) = (-n) \cdot [-(n+1)] = +n(n+1)$, oder aus $+n(n-1)(n-2)$ unter derselben Voraussetzung $(-n)(-n-1)(-n-2) = (-n) \cdot [-(n+1)] \cdot [-(n+2)] = -n(n+1)(n+2)$, und so auch in den übrigen Fällen.

2) Es sei der Exponent ein Quotient, etwa $\frac{1}{n}$, dann wird:

aus $n-1$ —— $\frac{1}{n} - 1 = \frac{1-n}{n} = -\frac{n-1}{n}$,

„ $n-2$ —— $\frac{1}{n} - 2 = \frac{1-2n}{n} = -\frac{2n-1}{n}$,

„ $n-3$ —— $\frac{1}{n} - 3 = \frac{1-3n}{n} = -\frac{3n-1}{n}$ u. s. w.

Setzt man die so veränderten Exponenten und Coëffizienten in die allgemeine Gleichung, so verwandelt sie sich in die folgende:

$$(a+b)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{-\frac{n-1}{n}} b + \frac{\frac{1}{n} \cdot -\frac{n-1}{n}}{1.2} a^{-\frac{2n-1}{n}} b^2 + \frac{\frac{1}{n} \cdot -\frac{n-1}{n} \cdot -\frac{2n-1}{n}}{1.2.3} a^{-\frac{3n-1}{n}} b^3 + \ldots$$

$$= a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{-\frac{n-1}{n}} b - \frac{n-1}{2n^2} a^{-\frac{2n-1}{n}} b^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3n^3} a^{-\frac{3n-1}{n}} b^3 - \ldots$$

Setzt man hier statt a die Potenz a^n, so verschwinden alle Bruch-Exponenten und die Gleichung wird:

$$(a^n + b)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n + b} =$$

$$= (a^n)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} (a^n)^{-\frac{n-1}{n}} b - \frac{n-1}{2n^2} (a^n)^{-\frac{2n-1}{n}} b^2 + \ldots.$$

$$= a + \frac{1}{n} a^{-(n-1)} b - \frac{n-1}{2n^2} a^{-(2n-1)} b^2 + \ldots.$$

$$= a + \frac{1}{n} \cdot \frac{b}{a^{n-1}} - \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{a^{2n-1}} + \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3n^3} \cdot \frac{b^3}{a^{3n-1}} - \ldots$$

$$= a\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{b}{a^n} - \frac{n-1}{2n^2} \cdot \left(\frac{b}{a^n}\right)^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3n^3} \cdot \left(\frac{b}{a^n}\right)^3 - \ldots\right)$$

Um nun unsern Induktions-Beweis zu liefern, sei

1) in der sub 1) gefundenen Gleichung n nacheinander $= 1, = 2, = 3$, so haben wir:

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a+b} =$$

$$= a^{-1} - \frac{1}{1}a^{-(1+1)}b + \frac{1.(1+1)}{1.2}a^{-(1+2)}b^2 - \frac{1.(1+1)(1+2)}{1.2.3}a^{-(1+3)}b^3 + \ldots.$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots,$$

welche Reihe mit der durch Division aus $\frac{1}{a+b}$ erhaltenen vollkommen übereinstimmt.

$$(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2+2ab+b^2} =$$

$$= a^{-2} - \frac{2}{1}a^{-(2+1)}b + \frac{2.(2+1)}{1.2}a^{-(2+2)}b^2 - \frac{2(2+1)(2+2)}{1.2.3}a^{-(2+3)}b^3 + \ldots.$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \ldots$$

Dividirt man aber $\frac{1}{a^2+2ab+b^2}$, so erhält man als Quotienten in der That die nämliche Reihe; es ist nämlich

$$1 : (a^2+2ab+b^2) = \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \ldots.$$

$$\begin{array}{l}
1 + \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \\
\underline{(-)\ \ (-)\ \ (-)} \\
\quad - \frac{2b}{a} - \frac{b^2}{a^2} \\
\quad - \frac{2b}{a} - \frac{4b^2}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} \\
\underline{\quad (+)\ \ (+)\ \ (+)} \\
\quad + \frac{3b^2}{a^2} + \frac{2b^3}{a^3} \\
\quad + \frac{3b^2}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} \\
\underline{\quad (-)\ \ (-)\ \ (-)} \\
\quad - \frac{4b^3}{a^3} - \frac{3b^4}{a^4} \\
\quad - \frac{4b^3}{a^3} \text{ u. s. w.}
\end{array}$$

Endlich ist $(a+b)^{-3} = \frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3} =$

$$= a^{-3} - \frac{3}{1}a^{-4}b + \frac{3.4}{1.2}a^{-5}b^2 - \frac{3.4.5}{1.2.3}a^{-6}b^3 + \frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}a^{-7}b^4 - \ldots$$

$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3b}{a^4} + \frac{6b^2}{a^5} - \frac{10b^3}{a^6} + \frac{15b^4}{a^7} - \ldots,$$

welche Reihe sich abermals bestätigt, wenn man die Division von $\frac{1}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$ wirklich ausführt.

2) Setzen wir in der unter 2) erhaltenen Gleichung zuerst $n = 2$, so haben wir:

$$(a^2+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a^2+b} = a + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a^{2-1}} - \frac{2-1}{2.2^2}\cdot\frac{b^2}{a^{4-1}} +$$

$$+ \frac{(2-1)(4-1)}{2.3.2^3}\cdot\frac{b^3}{a^{6-1}} - \frac{(2-1)(4-1)(6-1)}{2.3.4.2^4}\cdot\frac{b^4}{a^{8-1}} + \ldots.$$

$$= a + \frac{b}{2a} - \frac{b^2}{8a^3} + \frac{b^3}{16b^5} - \frac{5b^4}{128a^7} + \ldots.,$$

eine Reihe, welche in der That mit der in §. 56 für eben diese Wurzel erhaltenen völlig übereinstimmt.

Setzen wir noch $n = 3$, so ist:

$$(a^3+b)^{\frac{1}{3}} = a + \frac{1}{3}\cdot\frac{b}{a^{3-1}} - \frac{3-1}{2.9}\cdot\frac{b^2}{a^{6-1}} + \frac{(3-1)(6-1)}{2.3.27}\cdot\frac{b^3}{a^{9-1}} -$$

$$- \frac{(3-1)(6-1)(9-1)}{2.3.4.81}\cdot\frac{b^4}{a^{12-1}} + \ldots.$$

$$= a + \frac{b}{3a^2} - \frac{b^2}{9a^5} + \frac{5b^3}{81a^8} - \frac{10b^4}{243a^{11}} + \ldots.,$$

welche Reihe abermals mit der im §. 57 am Schlusse gefundenen dieselbe ist.

§. 61.

Anwendungen.

Ehe wir wirklich zu diesen übergehen, muß vor Allem bemerkt werden, daß unsere erste Gleichung nur in dem Falle, daß $a = 0$, die zweite aber nur dann, wenn $n = 1$, ein endliches Resultat (1 und beziehungsweise $a+b$), in allen übrigen Fällen aber beide endlose Reihen von Gliedern geben. Den Werth einer solchen Reihe kann man natürlich nie vollständig, wohl aber dann annähernd

bestimmen, wenn dieselbe mehr oder weniger konvergent ist. Dieß ist aber bei unsern Reihen der Fall, und zwar bei der ersten, wenn $\frac{b}{a}$, bei der zweiten, wenn $\frac{b}{a^n}$ ein ächter Bruch ist, und die Reihen sind um so konvergenter, je kleiner diese Brüche, was denn bei der Anwendung besonders zu berücksichtigen ist.

A. Beispiele mit negativen Exponenten.

1) $\frac{1}{2{,}006} = (2{,}006)^{-1} =$

$$= 2^{-1}\left(1 - 1 \cdot \frac{0{,}006}{2} + \frac{1.2}{1.2} \cdot \left(\frac{0{,}006}{2}\right)^2 - \frac{1.2.3}{1.2.3} \cdot \left(\frac{0{,}006}{2}\right)^3 + \ldots\right)$$

$$\frac{1}{2{,}006} = \frac{1}{2}(1 - 0{,}003 + 0{,}000009 - 0{,}000000027 + \ldots.)$$

$$\left|\begin{array}{l} 1{,}000009 \\ :0{,}003000027: \\ \hline 0{,}997008973 \end{array}\right|$$

$$\frac{1}{2{,}006} = 0{,}498504486\ldots.$$

Die Division gibt dasselbe Resultat, nämlich:

$$\begin{array}{r|l} 1{,}0000 & 0{,}498504486\ldots. \\ :(2{,}006) & \\ \hline 8024 & \\ \hline 19760 & \\ 18054 & \\ \hline 17060 & \\ 16048 & \\ \hline 10120 & \\ 10030 & \\ \hline 9000 & \\ 8024 & \\ \hline 9760 & \\ 8024 & \\ \hline 17360 & \\ 16048 & \\ \hline 13120 & \\ 12036 & \\ \hline \text{u. s. w.} & \end{array}$$

2) $\frac{1}{4,1616} = \frac{1}{(2,04)^2} = (2,04)^{-2} =$

$$= 2^{-2}\left(1 - \frac{2}{1} \cdot \frac{0,04}{2} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{0,04}{2}\right)^2 - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{0,04}{2}\right)^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{0,04}{2}\right)^4 \ldots .\right)$$
$$= \frac{1}{4}(1 - 0,04 + 3 \cdot 0,0004 - 4 \cdot 0,000008 + 5 \cdot 0,00000016 - \ldots .)$$
$$= \frac{1}{4}(1 - 0,04 + 0,0012 - 0,000032 + 0,00000080 - \ldots .)$$

$$\left| \begin{array}{c} 1,0012008 \\ :0,0400320: \\ \hline 0,9611688 \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 0,9611688 = 0,2402922.$$

3) $\left(\frac{27876}{59165}\right)^6 = \left(\frac{1}{2,1224350(7)}\right)^6 = (2,1224350(7))^{-6} =$

$$= (2,1)^{-6}\left(1 - \frac{6}{1} \cdot \frac{0,0224350(7)}{2,1} + \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{0,022\ldots}{2,1}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{0,022\ldots}{2,1}\right)^3 + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{(2,1)^6}(1 - 6 \cdot 0,0106833(7) + 21 \cdot 0,0001141(3) -$$
$$- 56 \cdot 0,0000012(2) + 126 \cdot 0,0000000(13) - \ldots)$$
$$= \frac{1}{85,766121}(1 - 0,0641002 + 0,0023967 - 0,0000683 +$$
$$+ 0,0000016 - \ldots)$$
$$= \frac{0,9382298}{85,766121} = 0,0109394.$$

Nebenrechnung.

$$(2,1)^6 = 2^6 + 6 \cdot 2^5 \cdot \frac{1}{10} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots$$
$$= 64 + 19,2 + 2,40 + 0,160 + 0,0060 + 0,00012 + 0,000001 =$$
$$= 85,766121.$$

Anmerkung. Es läßt sich also jeder beliebige Bruch auf diese Art potenziren, jedoch mit Vortheil nur die ächten Brüche,

weil bei den unächten der Quotient $\frac{b}{a}$ nicht klein genug wird, so daß noch die höhern Potenzen desselben berücksichtigt werden müßten, besonders darum, weil diese höhern Potenzen auch noch mit großen Coëffizienten zu multipliziren sind.

Durch das im folgenden Beispiele zu ersehende Verfahren wird jedoch auch die Herstellung der Potenzen von unächten Brüchen ermöglicht.

Hat man nämlich eine derartige Aufgabe, z. B.

4) $(8{,}34507)^7$, so setzt man diesen Ausdruck $= 1 : \frac{1}{(8{,}34507)^7}$

und entwickelt nun diesen Divisor-Quotienten, wie folgt:

$$\frac{1}{(8{,}34507)^7} = (8{,}34507)^{-7} =$$

$$= 8^{-7}\left(1 - \frac{7}{1} \cdot 0{,}04313375 + \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}04313\ldots)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (0{,}04313\ldots)^3 + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{8^7}(1 - 7 \cdot 0{,}043133(75) + 28 \cdot 0{,}001860(52) -$$

$$- 84 \cdot 0{,}000080(25) + 210 \cdot 0{,}000003(46) -$$

$$- 462 \cdot 0{,}000000(149) + 924 \cdot 0{,}000000(006) - \ldots)$$

$$= \frac{1}{2097152} \times \left(+ \begin{Bmatrix} 1{,}000000 \\ 0{,}052094 \\ 0{,}000727 \\ 0{,}000006 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0{,}301936 \\ 0{,}006741 \\ 0{,}000068 \end{Bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2097152} \times \frac{}{(1{,}052827 - 0{,}308745)} =$$

$$= \frac{0{,}744082}{2097152} = 0{,}00000035480595.$$

Es ist sonach:

$$(8{,}34507)^7 = 1 : \frac{1}{(8{,}34507)^7} = \frac{1}{0{,}00000035480595} =$$

$$= 2818442{,}024436\ldots.$$

B. Beispiele mit Bruch-Exponenten.

Vorbemerkung. Wenn die Formel für $(a^n + b)^{\frac{1}{n}}$ benützt werden soll, Wurzeln aus Zifferzahlen auszuziehen, so müssen natürlich die betreffenden Zahlen so in zwei Theilen dargestellt werden, daß der erste Theil eine nte Potenz und zwar so groß als möglich sei. Dieß ist denn in den folgenden Beispielen gehörig beachtet und zwar so, daß der zweite Theil bald positiv, bald negativ ist, je nachdem die zu radizirende Zahl sich der nten Potenz eines nächst niedern oder nächst höhern Dignands mehr nähert.

$$1)\ \sqrt[2]{17} = \sqrt[2]{16+1} = \sqrt[2]{4^2+1} =$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^2 + \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^3 - \frac{5}{128}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{256}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^5 - \ldots\right) =$$

$$= 4\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0625 - \frac{1}{8}\cdot 0{,}00390625 + \frac{1}{16}\cdot 0{,}00024414 - \right.$$

$$\left. - \frac{5}{128}\cdot 0{,}00001526 + \frac{7}{256}\cdot 0{,}00000095 - \ldots\right) =$$

$$= 4 \times \left(+\begin{Bmatrix}1{,}03125000\\ 0{,}00001526\\ 0{,}00000002\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}0{,}00048828\\ 0{,}00000059\end{Bmatrix}\right) =$$

$$= 4 \times (1{,}03126528 - 0{,}00048887) =$$

$$= 4 \times 1{,}03077641 = \underline{4{,}1231056(4.}$$

Wählt man den ersten Theil etwas größer, nämlich $= (4{,}1)^2 =$ $= 16{,}81$, so wird der zweite und noch mehr der Quotient $\frac{b}{a^n}$ kleiner, daher die Reihe viel convergenter wird. Wir haben dann:

$$2)\ \sqrt[2]{17} = \sqrt[2]{16{,}81+0{,}19} = \sqrt[2]{(4{,}1)^2+0{,}19} =$$

$$= 4{,}1\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}01130279(6) - \frac{1}{8}\cdot 0{,}00012775 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{16}\cdot 0{,}00000144 - \ldots\right)$$

$$= 4{,}1\,(1 + 0{,}00565140 - 0{,}00001597 + 0{,}00000009 - \ldots)$$

$$= 4{,}1 \times 1{,}00563552 = \underline{4{,}12310563.}$$

Anmerkung. In diesen wie in den folgenden Beispielen kommt es darauf an, die Potenzen aufzufinden, welche den gegebenen Radikanden am nächsten stehen; dazu reicht es hin, von den ersten 9 Zahlen die betreffenden Potenzen zu kennen, indem man dann weiß, zwischen welche Potenzen die gegebene Zahl fällt, und so die nächste Potenz versuchsweise leicht bestimmen kann.

So liegt im folgenden Beispiele 357 zwischen 256 und 625, d. i. zwischen 4^4 und 5^4, und es muß die Zahl 4,3, deren 4te Potenz der gegebenen Zahl 357 am nächsten kommt, durch Versuche gefunden werden.

3) $\sqrt[4]{357} = \sqrt[4]{341{,}8801 + 15{,}1199} = \sqrt[4]{(4{,}3)^4 + 15{,}1199} =$

$= 4{,}3\left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{15{,}1199}{341{,}8801} - \frac{3}{32} \cdot \left(\frac{15{,}1199}{341{,}8801}\right)^2 + \ldots\right) =$

$= 4{,}3\left(1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}044225739 - \frac{3}{32} \cdot 0{,}00195591 + \right.$

$\left. + \frac{7}{128} \cdot 0{,}00008649 - \frac{77}{2048} \cdot 0{,}00000382 + \ldots\right) =$

$= 4{,}3(1 + 0{,}01105643(5) - 0{,}00018337 + 0{,}00000473 -$

$- 0{,}00000014 + \ldots) =$

$= 4{,}3 \times \left(+ \begin{Bmatrix} 1{,}01105643) \\ 0{,}00000473 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0{,}00018337) \\ 0{,}00000014 \end{Bmatrix}\right) =$

$= 4{,}3 \times (1{,}01106116 - 0{,}00018351) = 4{,}3 \times 1{,}01087765 =$

$= \underline{4{,}3467739.}$

4) $\sqrt[4]{370} = \sqrt[4]{374{,}8096 - 4{,}8096} = \sqrt[4]{(4{,}4)^4 - 4{,}8096} =$

$= 4{,}4\left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{4{,}8096}{374{,}8096} - \frac{3}{32} \cdot \left(\frac{4{,}8096}{374{,}8096}\right)^2 - \ldots\right) =$

$= 4{,}4\left(1 - \frac{1}{4} \cdot 0{,}01283211(5) - \frac{3}{32} \cdot 0{,}00016466 - \right.$

$\left. - \frac{7}{128} \cdot 0{,}00000211 - \frac{77}{2048} \cdot 0{,}00000002(6) - \ldots\right)$

$= 4{,}4(1 - 0{,}00320803 - 0{,}00001544 - 0{,}00000011 - \ldots) =$

$= 4{,}4 \times \left(1 - \begin{Bmatrix} 0{,}00320803 \\ 0{,}00001544 \\ 0{,}00000011 \end{Bmatrix}\right) = 4{,}4(1 - 0{,}00322358) =$

$= 4{,}4 \times 0{,}99677642 = 4{,}3858162.$

$$5)\quad \sqrt[5]{10} = \sqrt[5]{10{,}48576 - 0{,}48576} = \sqrt[5]{(1{,}6)^5 - 0{,}48576} =$$

$$= 1{,}6\left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{0{,}48576}{10{,}48576} - \frac{5-1}{2.5^2}\cdot\left(\frac{0{,}48576}{10{,}48576}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{(5-1)(10-1)}{2.3.5^3}\cdot\left(\frac{0{,}48576}{10{,}48576}\right)^3 - \ldots\right)$$

$$= 1{,}6\left(1 - \frac{1}{5}\,.\,0.0463256(8) - \frac{2}{25}\,.\,0{,}0021460(6) - \right.$$

$$\left. - \frac{6}{125}\,.\,0{,}0000994 - \frac{21}{625}\,.\,0{,}0000046 - \ldots\right) =$$

$$= 1{,}6\,(1 - 0{,}0092651 - 0{,}0001717 - 0{,}0000048 -$$

$$- 0{,}0000001(5) - \ldots) =$$

$$= 1{,}6\,(1 - 0{,}0094417) = 1{,}6 \times 0{,}9905583 = \underline{1{,}584893.}$$

Imaginäre Zahlen.

§. 62.

Indem wir die Lehre von den Potenzen und Wurzeln schließen, kommen wir noch einmal auf den Anfang derselben zurück. Wir haben nämlich im §. 40, Anmerk. 3) gesehen, daß Potenzen, deren Exponenten gerade Zahlen sind, durchaus nur positiv sein können: ein Ausdruck also, wie $\sqrt[2]{-a^2}$ oder $\sqrt[4]{-a^4}$ u. dgl., hat demgemäß gar keinen Sinn, indem diese negativen Radikande unmöglich das sein können, als was sie ihrer Form nach erscheinen, nämlich Potenzen mit den Exponenten, welche die angesetzten Radikatoren verlangen. Derlei Ausdrücke, die an sich keinen Sinn hatten, sind uns im Verlaufe unserer Entwickelungen schon mehrere vorgekommen, z. B. $-a$, $\frac{a}{a+b}$ oder $\sqrt[2]{a^2+b}$; immer haben wir sie und zwar zum großen Gewinne für unsere Lehre als zulässig an- und aufgenommen: wir werden daher auch obige Ausdrücke, für welche wir freilich, weil sie gänzlich unstatthaft sind, auch keinen anderweitigen Sinn oder annähernden Werth anzugeben vermögen, und welche man daher als imaginär bezeichnet, nicht geradezu ausschließen, sondern auch hier zeigen, wie, wenn sie einmal in die Rechnung aufgenommen sind, mit ihnen gerechnet werden müsse. Und hiebei wird sich's abermals zeigen, daß die Zulassung solcher Ausdrücke

sich für die Mathematik nie unfruchtbar beweist, indem wir der Rechnung mit imaginären Zahlen schon für die Elementar-Mathematik einige interessante Folgerungen entnehmen werden, während erst die höhere Analyse dieser Rechnung die schönsten und wichtigsten Entdeckungen verdankt.

Der allgemeine Ausdruck einer imaginären Zahl ist $\sqrt[2n]{-a}$, wobei n jede beliebige ganze Zahl sein kann; aber obgleich sonach der Radikator einer imaginären Zahl jede beliebige bestimmte oder unbestimmte gerade Zahl sein kann, beschränkt man sich doch in der Regel auf die Rechnung mit imaginären Quadrat-Wurzeln, was denn auch wir hier thun wollen.

Eine solche ist denn allgemein $\sqrt[2]{-a}$. Es ist aber $\sqrt[2]{-a} = \sqrt[2]{a \times -1} = \sqrt[2]{a} \cdot \sqrt[2]{-1}$; da nun $\sqrt[2]{a}$ jedenfalls kein imaginärer, sondern, wie man zum Gegensatze hievon sagt, ein reeller Ausdruck ist, so folgt, daß man jede imaginäre Zahl in eine solche mit dem Radikande -1 verwandeln könne. Wenn wir daher in Folgendem zeigen, wie imaginäre Zahlen potenzirt werden, so brauchen wir das bloß für $\sqrt[2]{-1}$ zu thun.

Es ist nun:

$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$,
$(\sqrt{-1})^2 = -1$,
$(\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$,
$(\sqrt{-1})^4 = +1$,
$(\sqrt{-1})^5 = \sqrt{-1}$ u. s. w.,

so daß die sechste Potenz wieder = der zweiten, die siebente = der dritten, die achte = der vierten ist ꝛc. Daraus geht hervor, daß alle geraden Potenzen imaginärer Quadratwurzeln reelle, die ungeraden aber wieder selbst imaginäre Zahlen sind.

Das Radiziren würde uns natürlich sogleich auf höhere als Quadratwurzeln führen, weßwegen hier nicht davon die Rede sein kann; es bleibt uns also, wenn wir zudem überlegen, daß uns Multiplikation und Division in Eines zusammenfällt, nur noch zu untersuchen, wie imaginäre Quadratwurzeln, natürlich wieder mit Quadratwurzeln multiplizirt werden.

Hier sind zwei Fälle möglich:

1) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{-ab}$;
2) $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab}$ vorläufig; da aber $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} =$

$= (\sqrt{\ }-a)^2 = -a$, also hier die Multiplikation zweier imaginärer Wurzeln eine reelle, aber negative Zahl gibt, so muß auch oben die erhaltene reelle Wurzel negativ genommen werden: es ist also $\sqrt{\ }-a \,.\, \sqrt{\ }-b = -\sqrt{\ }ab$.

Beispiele.

1) a. $(-1+\sqrt{\ }-3)^3 = -1+3\sqrt{\ }-3+9-3\sqrt{\ }-3 = 8$,
daraus $\frac{(-1+\sqrt{\ }-3)^3}{8} = \left(\frac{-1+\sqrt{\ }-3}{2}\right)^3 = 1$.

b. $(-1-\sqrt{\ }-3)^3 = -1-3\sqrt{\ }-3+9+3\sqrt{\ }-3 = 8$,
mithin auch $\left(\frac{-1-\sqrt{\ }-3}{2}\right)^3 = 1$.

Da aber auch $1^3 = 1$, so folgt:

$\sqrt[3]{1} = 1$,
oder $\quad " \quad = \frac{-1+\sqrt{\ }-3}{2}$,
oder $\quad " \quad = \frac{-1-\sqrt{\ }-3}{2}$.

Ebenso $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{1} = a\sqrt[3]{1}$
entweder $= a$,
oder $= a \,.\, \frac{-1+\sqrt{\ }-3}{2}$,
oder $= a \,.\, \frac{-1-\sqrt{\ }-3}{2}$, d. h.

jeder positive Kubus hat drei Wurzeln, von denen die eine reell, die beiden andern aber imaginär sind.

2) $(1 \pm \sqrt{\ }-3)^3 = -8$, daher $\left(\frac{1 \pm \sqrt{\ }-3}{2}\right)^3 = -1$, da aber auch $(-1)^3 = -1$, so ist wieder:

$\sqrt[3]{-1} = -1$,
oder $\quad " \quad = \frac{1+\sqrt{\ }-3}{2}$,
oder $\quad " \quad = \frac{1-\sqrt{\ }-3}{2}$, und

ebenſo $\sqrt[3]{-a^3} = \sqrt[3]{a^3} . \sqrt[3]{-1} =$ entweder $a . -1 = -a$,

oder $a . \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$,

oder $a . \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, d. h.

auch jeder negative Kubus hat drei Wurzeln, und zwar wieder eine reelle und zwei imaginäre.

3) a. $(1+\sqrt{-1})^4 = (1+\sqrt{-1})^2 . (1+\sqrt{-1})^2 =$
$= (1-1+2\sqrt{-1})(1-1+2\sqrt{-1}) =$
$= (2\sqrt{-1}) . (2\sqrt{-1}) = 4 . -1 = -4$;

b. $(1-\sqrt{-1})^4 = -4$,

c. $(-1+\sqrt{-1})^4 = -4$,

d. $(-1-\sqrt{-1})^4 = -4$; daher

$\left(\frac{\pm 1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^4 = -1$ und ſomit

$\sqrt[4]{-1} = \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt[4]{-a^4} = a . \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$,

$= \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $= a . \frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$,

$= \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $= a . \frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$,

$= \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, $= a . \frac{-1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$.

Bekanntlich iſt aber auch:

$\sqrt[4]{1} = +1$, daher $\sqrt[4]{a^4} = +a$,

$= -1$, $= -a$,

$= +\sqrt{-1}$, $= a\sqrt{-1}$,

$= -\sqrt{-1}$, $= -a\sqrt{-1}$.

Alſo auch jede vierte Potenz hat vier Wurzeln, und zwar, wenn ſie poſitiv, zwei reelle und zwei imaginäre, wenn ſie negativ, lauter imaginäre.

4) a. $(\sqrt{3}+\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{3}+\sqrt{-1})^3 \times (\sqrt{3}+\sqrt{-1})^3 =$
$= (3\sqrt{3}+9\sqrt{-1}-3\sqrt{3}-\sqrt{-1})(3\sqrt{3}+9\sqrt{-1}-3\sqrt{3}-\sqrt{-1})$
$= 8\sqrt{-1} \times 8\sqrt{-1} = -64 = -2^6;$

daraus $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}\right)^6 = -1;$

b. $(\sqrt{3}-\sqrt{-1})^6 = -64$, woraus $\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2}\right)^6 = -1;$

c. $(-\sqrt{3}+\sqrt{-1})^6 = -64$, also auch $\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2}\right)^6 = -1;$

d. $(-\sqrt{3}-\sqrt{-1})^6 = -64$ und daher noch $\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2}\right)^6 = -1.$

Endlich ist auch sowohl $(+\sqrt{-1})^6 = -1,$
als auch $(-\sqrt{-1})^6 = -1.$

Mithin ist umgekehrt:

1) $\sqrt[6]{-1} = +\sqrt{-1}$, also auch $\sqrt[6]{-a^6} = +a\sqrt{-1},$
2) $= -\sqrt{-1},$ $= -a\sqrt{-1},$
3) $= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2},$ $= a.\frac{\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2},$
4) $= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2},$ $= a.\frac{\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2},$
5) $= \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2},$ $= a.\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{-1}}{2},$
6) $= \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2},$ $= a.\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{-1}}{2}.$

Wir sehen hier wieder eine sechste Potenz, welche 6 Wurzeln hat, und zwar, weil sie negativ ist, lauter imaginäre.

Ziehen wir, von weitern Beispielen abgesehen, noch in Betracht, daß auch

a) $\sqrt{+a^2} = +a,$
$= -a,$
b) $\sqrt{-a^2} = +a\sqrt{-1},$
$= -a\sqrt{-1},$

so können wir allgemein folgenden Satz aussprechen:

Jede nte Potenz hat n Wurzeln und zwar

a) wenn n eine ungerade Zahl ist, eine reelle und (n — 1) imaginäre, die Potenz selbst mag positiv oder negativ sein;

b) wenn n eine gerade Zahl und
   α) die Potenz positiv ist, zwei reelle und (n — 2) imaginäre,
   β) aber wenn die Potenz negativ ist, lauter imaginäre Wurzeln.

5) $(1+\sqrt{-5})^4 = -4-16\sqrt{-5}$.

Nebenrechnung.

$$\begin{array}{r} 1+\sqrt{-5} \\ 1+\sqrt{-5} \\ 1+\sqrt{-5} \\ +\sqrt{-5}-5 \\ \hline -4+2\sqrt{-5} \\ 1+\sqrt{-5} \\ \hline -4+2\sqrt{-5} \\ -4\sqrt{-5}-10 \\ \hline -14-2\sqrt{-5} \\ 1+\sqrt{-5} \\ \hline -14-2\sqrt{-5} \\ -14\sqrt{-5}+10 \\ \hline -4-16\sqrt{-5} \end{array}$$

6) $\sqrt{2-\sqrt{-5}}$ oder $(\sqrt{2-\sqrt{-5}})^4 =$

$$\begin{array}{r} \sqrt{2-\sqrt{-5}} \\ \hline 2-\sqrt{-10} \\ -\sqrt{-10}-5 \\ \hline -3-2\sqrt{-10} \\ \sqrt{2-\sqrt{-5}} \\ \hline -3\sqrt{2}-4\sqrt{-5} \\ +3\sqrt{-5}-10\sqrt{2} \\ \hline -13\sqrt{2}-\sqrt{-5} \\ \sqrt{2-\sqrt{-5}} \\ \hline -26-\sqrt{-10} \\ +13\sqrt{-10}-5 \\ \hline -31+12\sqrt{-10} \end{array}$$

$= (\sqrt{2-\sqrt{-5}})^2 \times (\sqrt{2-\sqrt{-5}})^2 =$
$= (-3-2\sqrt{-10})^2 =$
$= 9+12\sqrt{-10}-40 =$
$= -31+12\sqrt{-10}.$

u. s. w.

Fünfter Abschnitt.

Logarithmiren.

§. 63.

Wir haben oben §. 41 gesehen, daß, weil Dignand und Exponent nicht verwechselt werden können, vom Potenziren zwei Umkehrungen möglich sind, das Radiziren und das Logarithmiren. Verbindet man nemlich die Potenz mit dem Dignande, um den Exponenten zu erhalten, so heißt dieses logarithmiren.

Das Zeichen dieser Verbindung besteht darin, daß man den Dignand links unter die Potenz, zwischen beide aber das Zeichen (Λ) setzt, welches man mit „Logarithmus" liest. Der Ausdruck des Logarithmirens ist also:

$$\Lambda_b^a = (\Lambda_b^a),$$

in welchem Ausdrucke die Potenz a nun die Zahl kurzweg, der Dignand b die Basis und der Exponent (Λ_b^a)*) der Logarithmus heißt. Gelesen aber wird Λ_b^a mit „der Logarithmus von a (in Bezug) auf b."

Das Logarithmiren geschieht bei Buchstabenzahlen nur formell, indem eben Λ_b^a nicht $= c$, sondern $= (\Lambda_b^a)$ gesetzt wird; bei Zifferzahlen aber sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1) die Zahl ist wirklich eine ganze Potenz der Basis oder des gegebenen Dignands,
2) sie ist es nicht.

---

*) Da das Logarithmus- wie das Wurzelzeichen leicht über den ganzen zu logarithmirenden Ausdruck gezogen werden kann, und so ein Irrthum hinsichtlich dieses Ausdruckes nicht wohl möglich, die Basis aber ohnehin durch ihre Stellung kenntlich ist, so werden wir in der Folge in dem Ausdrucke (Λ_b^a) die Klammer, welche denselben als den Logarithmus bezeichnet, immer weglassen.

Im ersten Falle läßt sich der Exponent oder Logarithmus ermitteln, indem man untersucht, wie oft die Basis als Faktor in der Zahl enthalten ist, was durch fortgesetzte Division geschieht. So ist $\log_2 64 = 6$, weil $64 = 2.32 = 2.2.16 = 2.2.2.8 = 2.2.2.2.4 = 2.2.2.2.2.2 = 2^6$, oder $\log_3 243 = 5$, weil $243 = 3.81 = 3.3.27 = 3.3.3.9 = 3.3.3.3.3 = 3^5$.

Im zweiten Falle läßt sich durch dasselbe Mittel des fortgesetzten Dividirens bloß angeben, zwischen welchen ganzen Zahlen der gesuchte Logarithmus liege. Ist z. B. $\log_3 64$ gesucht, so findet sich $64 = 3.21\frac{1}{3} = 3.3.7\frac{1}{9} = 3.3.3.2\frac{10}{27}$, d. h. die Basis 3 ist 3mal ganz, ein 4tes Mal aber nicht mehr ganz in 64 enthalten; $\log_3 64$ ist daher > 3, aber < 4, mithin ein zwischen diesen Zahlen liegender unächter Bruch. Eben darauf kommt man, wenn man bemerkt, daß 64 zwischen den ganzen Potenzen 27 und 81 von 3 liege, nemlich zwischen 3^3 und 3^4 daher auch der Exponent von 64 zwischen diesen Exponenten 3 und 4 liegen müsse.

Ebenso ist $\log_{10} 230 > 2$, aber < 3, weil $230 = 10.23 = 10.10.2\frac{3}{10}$, — also abermals ein unächter Bruch. Aber die Größe dieses unächten Bruches über die angegebene Gränze hinaus irgend genauer zu bestimmen, bieten die bisherigen Entwickelungen kein Mittel an die Hand. Wohl werden wir weiter unten sehen, auf welche Weise die Logarithmen der Zifferzahlen wenigstens für Eine Basis (10) vom Anfange berechnet worden sind, jedoch erst die höhere Analyse gibt eine einfachere Methode an, die Logarithmen allgemein nicht bloß für Eine, sondern für jede beliebige Basis, durch convergente Reihen nemlich, herzustellen.

Es ist aber wohl zu bemerken, daß es keineswegs dieses Herstellen der Logarithmen ist, was wir logarithmiren heißen; wir verstehen vielmehr darunter nur das unmittelbare Setzen des Exponenten, wenn Potenz und Dignand gegeben sind, was wenigstens für die Basis 10 durch Tafeln geschieht, die wir weiter unten noch näher kennen lernen werden.

§. 64.

Die Wechselbeziehung, welche zwischen Potenziren und Logarithmiren besteht, findet ihren bestimmten Ausdruck, wenn wir

1) auf den Ausdruck des Potenzirens die Definition des Logarithmirens;
2) umgekehrt auf den Ausdruck des Logarithmirens die Definition des Potenzirens anwenden.

Dieß gibt uns folgende zwei Grundsätze:

I. $\log_b(b^a) = a$, wobei (b^a) die Potenz, b der Dignand und a der Exponent;

II. $b^{\log_b a} = a$, wobei a die Potenz, b der Dignand und daher $\log_b a$ der Exponent.

Mit Worten:

I. Wenn man eine Potenz auf ihren Dignand logarithmirt, so erhält man ihren Exponenten, z. B.

$\log_{10}(100) = \log_{10}(10^2) = 2$, oder $\log_5(125) = \log_5(5^3) = 3$;

II. wenn man die Basis mit dem Logarithmus einer Zahl potenzirt, so erhält man die Zahl selbst, z. B.

$10^{\log_{10}(100)} = 10^2 = 100$, oder $5^{\log_5(125)} = 5^3 = 125$.

§. 65.

Vergleichen wir zwei Logarithmen *) $\log_b a$ und $\log_d c$ mit einander, so sind drei Fälle möglich:

1) die beiderseitigen Zahlen sind die nämlichen;
2) nur ein Paar homologe Zahlen sind einander gleich, das andere ungleich;
3) beide Paare homologer Zahlen sind ungleich.

ad 1) Ist $a = c$ und $b = d$, so ist auch $\log_b a = \log_d c$, weil, wenn die Exponenten (Logarithmen) bei gleichen Dignanden ($b = d$)

---

*) Die Vergleichung zweier Potenzen, welche sonst hieher gehören würde, ist schon früher mit der der Wurzeln vorgenommen worden.

ungleich wären, auch die Potenzen nicht gleich sein könnten, während doch $a = c$. Mithin gilt: Gleiches auf Gleiches logarithmirt gibt Gleiches.

ad 2) Hier kann

α) $b = d$,

oder β) $a = c$ sein.

Ist α) $b = d$, aber $a > c$, so ist $\log_b a > \log_d c$; denn wären diese Exponenten (Logarithmen) einander gleich, so wären es bei den gleichen Dignanden ($b = d$) auch die Potenzen, während doch $a > c$; oder wäre $\log_b a < \log_d c$, so wäre gemäß den frühern Vergleichungen auch die Potenz $a <$ als die Potenz c, was abermals der Voraussetzung ($a > c$) widerspricht.

Ist aber β) $a = c$, hingegen $b > d$, so ist umgekehrt $\log_b a < \log_d c$; denn wären diese Exponenten gleich, so müßten bei der Ungleichheit der Dignande ($b > d$) auch die Potenzen im nämlichen Verhältnisse ungleich sein, während $a = c$. Wäre aber $\log_b a > \log_d c$, so müßte der größere Dignand b mit dem größern Exponenten $\log_b a$ eine größere Potenz geben, als der kleinere Dignand d mit dem kleinern Exponenten $\log_d c$, es müßte also $a > c$ sein, was der Voraussetzung, daß $a = c$, abermals widerspricht.

Es ist also:

α) wenn $a > c$,	aber β) wenn $a = c$;
$b = d$,	$b > d$,
$\log_b a > \log_d c$,	$\log_b a < \log_d c$;

d. h. α) ungleiche Zahlen haben bei gleichen Basen ungleiche Logarithmen, nemlich die größere Zahl auch den größeren Logarithmus, die kleinere den kleinern;

β) gleiche Zahlen haben bei ungleichen Basen ebenfalls ungleiche Logarithmen, jedoch bei der größern Basis den kleinern, bei der kleinern den größern.

ad 3) Sind sowohl die Zahlen, als die Basen ungleich, so ist das Verhältniß der Logarithmen gänzlich unbestimmt. Gerade diese

Unbestimmtheit aber läßt auch den Fall der Gleichheit zu, daß also $\log_b a = \log_d c$, welche Gleichung wir wieder als eine Proportion bezeichnen, und später darauf zurückkommen werden.

§. 66.

Nachdem wir nun das Logarithmiren in seiner formellen wie materiellen Bedeutung betrachtet und ebenso die Vergleichung der Logarithmen unter sich aus dieser Bedeutung her durchgeführt haben, müssen wir die neue Rechnungsart mit den vorigen dadurch in Verbindung setzen, daß wir zeigen:

a) wie dieselbe auf die Resultate dieser,
b) wie die vorigen Rechnungsarten auf das Resultat der neuen angewendet werden.

Die aus a) entspringenden Aufgaben sind:

1) Summen und Differenzen,
2) Produkte,
3) Quotienten,
4) Potenzen und
5) Wurzeln zu logarithmiren.

1) Die erste Aufgabe ist enthalten in $\log_b \underline{a \pm c}$. Soll sie löslich werden, so müssen diese Zahlen als Potenzen des Dignands b dargestellt werden; es ist aber nach Grundsatz II. $a = b^{\log_b a}$ und $c = b^{\log_b c}$, mithin

$$\log_b \underline{a \pm c} = \log_b \underline{b^{\log_b a} \pm b^{\log_b c}}.$$

Wären nun diese beiden Potenzen summirbar, d. h. könnten sie in Eine Potenz des Dignands b vereinigt werden, so wäre die Aufgabe nach Grundsatz I. löslich; so aber ist das nicht möglich, woraus folgt, daß

„Summen und Differenzen nicht logarithmirt werden können."

2) $\log_b \underline{ac} \overset{\text{II}}{=} \log_b \underline{b^{\log_b a} \times b^{\log_b c}} = \log_b \underline{b^{(\log_b a + \log_b c)}} \overset{\text{I}}{=}$

$= \log_b a + \log_b c,$

d. h. ein Produkt wird auf eine Basis logarithmirt,

indem man jeden Faktor auf dieselbe Basis logarithmirt und die erhaltenen Logarithmen addirt.

Anmerkung. Da sowohl hier als auch in jeder der folgenden Aufgaben durchaus auf dieselbe Basis b logarithmirt wird, so mag man der Kürze halber dieselbe überall weglassen, wobei man sich aber hüten muß, den Irrthum einschleichen zu lassen, als habe $\wedge a$ u. dgl. für sich (ohne Basis) irgend einen Sinn. Mit dieser Abkürzung heißt unser erstes Gesetz:

$$\wedge ac \overset{1}{=} \wedge a + \wedge c,$$

mit Worten: Ein Produkt wird logarithmirt, indem man die Logarithmen der Faktoren addirt.

$$3)\quad \wedge\frac{a}{c} \overset{II}{=} \wedge\frac{b^{\wedge a}}{b^{\wedge c}} = \wedge b^{\wedge a - \wedge c} \overset{I}{=} \wedge a - \wedge c,$$

also $$\wedge\frac{a}{c} \overset{2}{=} \wedge a - \wedge c,$$

d. h. ein Quotient wird logarithmirt, indem man vom Logarithmus des Dividends den des Divisors subtrahirt.

$$4)\quad \wedge a^n \overset{II}{=} \wedge (b^{\wedge a})^n = \wedge b^{n \wedge a} \overset{I}{=} n \wedge a, \text{ also}$$

$$\wedge a^n \overset{3}{=} n \wedge a,$$

d. h. eine Potenz wird logarithmirt, indem man mit dem Exponenten derselben den Logarithmus des Dignands multiplizirt.

$$5)\quad \wedge\sqrt[n]{a} \overset{II}{=} \wedge\sqrt[n]{b^{\wedge a}} = \wedge b^{\frac{\wedge a}{n}} \overset{I}{=} \frac{\wedge a}{n} = \frac{1}{n}\wedge a,$$

also $$\wedge\sqrt[n]{a} \overset{4}{=} \frac{1}{n}\wedge a,$$

d. h. eine Wurzel wird logarithmirt, indem man den Logarithmus des Radikands durch den Radikator dividirt.

Anmerkung. Vom 3ten Gesetze kann sogleich eine wichtige, das Verhältniß der Logarithmen für verschiedene Basen bezeichnende Anwendung gemacht werden. Es seien nemlich die Logarithmen einer und derselben Zahl a mit $_b\wedge a$ und $_c\wedge a$ gegeben, so ist

sowohl $a \overset{II}{=} b^{b\backslash a}$,

als auch $a \overset{II}{=} c^{c\backslash a}$,

daher $b^{b\backslash a} = c^{c\backslash a}$.

Logarithmirt man diese Gleichung etwa auf c, so erhält man:

$$c\backslash b^{b\backslash a} = c\backslash c^{c\backslash a},$$

mithin nach dem 3ten Gesetze

$$b\backslash a \cdot c\backslash b = c\backslash a \cdot c\backslash c,$$

aber $c\backslash c \overset{I}{=} 1$,

daher $b\backslash a \cdot c\backslash b = c\backslash a$.

Ist nun etwa der Logarithmus von a für die Basis b gegeben, so dient die Gleichung dazu, den Logarithmus derselben Zahl für die Basis c zu berechnen, indem man nach $c\backslash a = c\backslash b \times b\backslash a$ den erstern mit $c\backslash b$, d. h. mit einer für dieselben Zahlen b und c konstanten Größe, nemlich mit dem Logarithmus der Zahl b für die Basis c multiplizirt.

So ist z. B.

$$10\backslash 64 = 10\backslash 2 \cdot 2\backslash 64 = 10\backslash 2 \times 6 = 6\ 10\backslash 2;$$

dasselbe erhält man auch nach

$$10\backslash 64 = 10\backslash 2^6 \overset{3}{=} 6\ 10\backslash 2.$$

§. 67.

Nach b) haben auch die vorigen Rechnungsarten auf die Logarithmen angewendet zu werden. Nun zeigen uns bereits die bisher aufgefundenen Gesetze, wenn wir sie umkehren,

1) wie Logarithmen addirt,
2) subtrahirt;
3) ein Logarithmus mit einer Zahl multiplizirt,
4) ein solcher durch eine Zahl dividirt wird.

Es ist nemlich

1) $a + c \overset{1}{=} ac$,
2) $a - c \overset{2}{=} \frac{a}{c}$,

3) $n \wedge a \overline{\overline{3}} \wedge a^n$,

4) $\frac{1}{n} \wedge a \overline{\overline{4}} \wedge \sqrt[n]{a}$.

Mit Worten:

1) Logarithmen*) werden addirt, indem man das Produkt aus ihren Zahlen logarithmirt;
2) Logarithmen werden subtrahirt, indem man den Quotienten aus der Zahl des Minuends durch die des Subtrahends logarithmirt;
3) eine Zahl wird mit dem Logarithmus einer zweiten Zahl multiplizirt, indem man die Potenz logarithmirt, deren Dignand die zweite und deren Exponent die erste Zahl ist;
4) durch eine erste Zahl wird der Logarithmus einer zweiten dividirt, indem man die Wurzel logarithmirt, deren Radikand die zweite und deren Radikator die erste Zahl ist.

Noch bleiben immerhin zwei Aufgaben übrig, nemlich

5) einen Logarithmus zu potenziren,
6) einen solchen zu radiziren.

Wir bemerken aber, daß nach $\overline{3}$ bereits die Multiplikation eines Logarithmus mit einer Zahl auf eine Potenz, nach $\overline{4}$ die Division eines solchen durch eine Zahl auf eine Wurzel führt: wohin sollte nun die Potenzirung oder Radizirung eines Logarithmus führen? Jedenfalls — oder es müßte die bisherige Gesetzmäßigkeit des Fortschreitens plötzlich abgebrochen werden, was in der Mathematik undenkbar ist — also jedenfalls zu Resultaten höherer Ordnung, als Potenzen und Wurzeln sind. Nun gibt es aber deren keine, mithin sind auch die obigen Aufgaben, die durchaus solche voraussetzen würden, unmöglich. Wohl kann man einen Logarithmus, insoferne er eine bloße Zahl ist, wie jede Zahl potenziren und radiziren, aber nie als Logarithmus.

Anmerkung. Es könnte, weil in $\overline{3}$ und $\overline{4}$ Logarithmen nur mit bloßen Zahlen durch Multiplikation und Division verbunden sind, die Frage aufgeworfen werden, was sich ergebe, wenn Logarithmen mit Logarithmen durch diese Rechnungsarten verbunden

---

*) derselben Basis natürlich. Man sehe, was hierüber §. 66, 2. Anmerkung gesagt ist.

werden. Die Antwort, die sich hierauf, auf diese nämlichen Gesetze $\overline{3}$ und $\overline{4}$ gestützt, geben läßt, bietet jedoch im Grunde nichts Neues, außer daß ein gewisses gegenseitiges Verhältniß zwischen zwei Zahlen und ihren Logarithmen hiebei zu unserer Kenntniß kömmt. Es ist nemlich $\Lambda a \times \Lambda c \overset{\overline{3}}{=} \Lambda \underline{a^{\Lambda c}} = \Lambda \underline{c^{\Lambda a}}$, woraus $a = c^{\frac{\Lambda a}{\Lambda c}}$, d. h. zwischen zwei Zahlen und ihren Logarithmen findet das Verhältniß statt, daß die erste potenzirt mit dem Logarithmus der zweiten dieselbe Potenz gibt, wie die zweite potenzirt mit dem Logarithmus der ersten. Aus $\frac{\Lambda a}{\Lambda c} \overset{\overline{4}}{=} \Lambda \underline{\sqrt[\Lambda c]{a}}$ folgt, wie man sieht, weiter nichts dem Obigen Aehnliches.

Anwendungen.

A.
In der Buchstabenrechnung.

§. 68.

Wir haben im §. 66 gesehen, wie die Multiplikation zweier Zahlen für ihre in Bezug auf dieselbe Basis ausgedrückten Logarithmen in eine Addition, die Division der Zahlen in eine Subtraktion der Logarithmen, endlich das Potenziren und Radiziren in ein bloßes Multipliziren und Dividiren übergeht. Von diesen Erleichterungen aber, die hienach die Rechnung mit den Logarithmen statt mit den Zahlen selbst bietet, wäre dennoch kein Gebrauch zu machen, wenn nicht auch umgekehrt nach §. 67 von der jeweiligen Funktion der Logarithmen auf die entsprechende Funktion der Zahlen, oder mit andern Worten, vom Logarithmus des Resultates auf das Resultat selbst der Schluß möglich wäre. So aber kann man sich der in §. 66 und §. 67 aufgefundenen Gesetze dazu bedienen, einen zusammengesetzten, mehr oder weniger verwickelten Ausdruck mit Buchstabenzahlen, wie uns z. B. deren im §. 50, E. vorgekommen sind, zu vereinfachen. Dieß geschieht, indem man denselben zuerst logarithmirt und zwar so lange, bis man durchgehends auf die Logarithmen bloßer Zahlen gekommen ist, an diesen Logarithmen die anbefohlenen Rechnungsarten vollzieht, und dann, nachdem die Funktion der Logarithmen so auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht ist, aus dieser durch Anwendung der Gesetze des §. 67 die

Funktion der Zahlen selbst herstellt, oder, wie man das gewöhnlich heißt, **delogarithmirt.**

Beispiele.

1. $$\left(\frac{\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt[2]{b}}}{a^{-1}\sqrt[3]{b}}\right)^4 = \sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt[3]{ab}.$$

$$\Lambda\left(\left(\frac{\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt[2]{b}}}{a^{-1}\sqrt[3]{b}}\right)^4\right) = 4\,\Lambda\left(\frac{\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt[2]{b}}}{a^{-1}\sqrt[3]{b}}\right) =$$

$$= 4\,\Lambda\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt[2]{b}} - 4\,\Lambda a^{-1}\sqrt[3]{b} =$$

$$= \frac{4}{3}\Lambda a^{-2}\sqrt[2]{b} - 4\,\Lambda a^{-1} - 4\,\Lambda\sqrt[3]{b} =$$

$$= \frac{4}{3}\Lambda a^{-2} + \frac{4}{3}\Lambda\sqrt[2]{b} + 4\,\Lambda a - \frac{4}{3}\Lambda b =$$

$$= -\frac{8}{3}\Lambda a + \frac{2}{3}\Lambda b + 4\,\Lambda a - \frac{4}{3}\Lambda b = \frac{4}{3}\Lambda a - \frac{2}{3}\Lambda b =$$

$$\overset{\text{delog.}}{=} \frac{4\Lambda a}{3} - \frac{2\Lambda b}{3} = \frac{\Lambda a^4}{3} - \frac{\Lambda b^2}{3} = \Lambda\sqrt[3]{a^4} - \Lambda\sqrt[3]{b^2} =$$

$$= \Lambda\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[3]{b^2}} = \Lambda\sqrt[3]{\frac{a^4}{b^2}}.$$

2. $$\left(\sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt[2]{\frac{a}{b}}}{\sqrt[3]{b^5\sqrt[4]{\frac{a^{15}}{b^3}}}}} : \frac{a^{-2}b\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[3]{a\sqrt[-3]{b}}}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^5.$$

$$\Lambda\left(\sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt[2]{\frac{a}{b}}}{\sqrt[3]{b^5\sqrt[4]{\frac{a^{15}}{b^3}}}}} : \frac{a^{-2}b\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[3]{a\sqrt[-3]{b}}}\right)^{-2} =$$

$$= -2\int\sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt[2]{\frac{a}{b}}}{\sqrt[3]{b^5\sqrt[4]{\frac{a^{15}}{b^3}}}} : \frac{a^{-2}b\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[3]{a\sqrt[-3]{b}}}} =$$

$$= -2\int\sqrt[3]{\frac{a^2\sqrt[2]{\frac{a}{b}}}{\sqrt[3]{b^5\sqrt[4]{\frac{a^{15}}{b^3}}}}} + 2\int\frac{a^{-2}b\sqrt[4]{ab^3}}{\sqrt[3]{a\sqrt[-3]{b}}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\int\frac{a^2\sqrt[2]{\frac{a}{b}}}{\sqrt[3]{b^5\sqrt[4]{\frac{a^{15}}{b^3}}}} + 2\int a^{-2}b\sqrt[4]{ab^3} - 2\int\sqrt[3]{a\sqrt[-3]{b}} =$$

$$= -\frac{2}{3}\int a^2\sqrt[2]{\frac{a}{b}} + \frac{2}{3}\int\sqrt[3]{b^5\sqrt[4]{\frac{a^{15}}{b^3}}} + 2\int a^{-2} +$$

$$+ 2\int b + 2\int\sqrt[4]{ab^3} - \frac{2}{3}\int a\sqrt[-3]{b} =$$

$$= -\frac{2}{3}\int a^2 - \frac{2}{3}\int\sqrt[2]{\frac{a}{b}} + \frac{2}{9}\int b^5\sqrt[4]{\frac{a^{15}}{b^3}} - 4\int a +$$

$$+ 2\int b + \frac{1}{2}\int ab^3 - \frac{2}{3}\int a - \frac{2}{3}\int\sqrt[-3]{b} =$$

$$= -\frac{4}{3}\int a - \frac{1}{3}\int\frac{a}{b} + \frac{2}{9}\int b^5 + \frac{2}{9}\int\sqrt[4]{\frac{a^{15}}{b^3}} - 4\int a +$$

$$+ 2\int b + \frac{1}{2}\int a + \frac{1}{2}\int b^3 - \frac{2}{3}\int a + \frac{2}{9}\int b =$$

$$= -\frac{4}{3}\int a - \frac{1}{3}\int a + \frac{1}{3}\int b + \frac{10}{9}\int b + \frac{1}{18}\int\frac{a^{15}}{b^3} - 4\int a +$$

$$+ 2\int b + \frac{1}{2}\int a + \frac{3}{2}\int b - \frac{2}{3}\int a + \frac{2}{9}\int b =$$

$$\left| : \frac{1}{18}\int\frac{a^{15}}{b^3} = \frac{1}{18}\int a^{15} - \frac{1}{18}\int b^3 = \frac{5}{6}\int a - \frac{1}{6}\int b : \right|$$

$$= -\frac{4}{3}\int a - \frac{1}{3}\int a + \frac{1}{3}\int b + \frac{10}{9}\int b + \frac{5}{6}\int a - \frac{1}{6}\int b - 4\int a +$$

$$+ 2\int b + \frac{1}{2}\int a + \frac{3}{2}\int b - \frac{2}{3}\int a + \frac{2}{9}\int b =$$

$$= \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - 4 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) \lambda a +$$

$$+ \left(\frac{1}{3} + \frac{10}{9} - \frac{1}{6} + 2 + \frac{3}{2} + \frac{2}{9}\right) \lambda b =$$

$$= -5\,\lambda a + 5\,\lambda b \overset{\text{delog.}}{=} -\lambda a^5 + \lambda b^5 = \lambda \frac{b^5}{a^5} =$$

$$= \lambda \underline{\left(\frac{b}{a}\right)^5}.$$

3) $$\sqrt[3]{\frac{a^5 b^4}{\sqrt[4]{a}}} : \sqrt[2]{\frac{a^3}{\sqrt[2]{b^3}} : \left(\sqrt[2]{\frac{a}{b}}\right)^3} = ab\sqrt[3]{b}.$$

$$\lambda \underline{\sqrt[3]{\frac{a^5 b^4}{\sqrt[4]{a}}} : \sqrt[2]{\frac{a^3}{\sqrt[2]{b^3}} : \left(\sqrt[2]{\frac{a}{b}}\right)^3}} =$$

$$= \lambda \underline{\sqrt[3]{\frac{a^5 b^4}{\sqrt[4]{a}}}} - \lambda \underline{\sqrt[2]{\frac{a^3}{\sqrt[2]{b^3}} : \left(\sqrt[2]{\frac{a}{b}}\right)^3}} =$$

$$= \frac{1}{3} \lambda \underline{\frac{a^5 b^4}{\sqrt[4]{a}}} - \frac{1}{2} \lambda \underline{\frac{a^3}{\sqrt[2]{b^3}} : \left(\sqrt[2]{\frac{a}{b}}\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{3} \lambda a^5 b^4 - \frac{1}{3} \lambda \underline{\sqrt[4]{a}} - \frac{1}{2} \lambda \underline{\frac{a^3}{\sqrt[2]{b^3}}} + \frac{1}{2} \lambda \underline{\left(\sqrt[2]{\frac{a}{b}}\right)^3} =$$

$$= \frac{1}{3} \lambda a^5 + \frac{1}{3} \lambda b^4 + \frac{1}{12} \lambda a - \frac{1}{2} \lambda a^3 + \frac{1}{2} \lambda \underline{\sqrt[2]{b^3}} + \frac{3}{2} \lambda \underline{\sqrt[2]{\frac{a}{b}}} =$$

$$= \frac{5}{3} \lambda a + \frac{4}{3} \lambda b + \frac{1}{12} \lambda a - \frac{3}{2} \lambda a + \frac{1}{4} \lambda b^3 + \frac{3}{4} \lambda \frac{a}{b} =$$

$$= \frac{5}{3} \lambda a + \frac{4}{3} \lambda b + \frac{1}{12} \lambda a - \frac{3}{2} \lambda a + \frac{3}{4} \lambda b + \frac{3}{4} \lambda a - \frac{3}{4} \lambda b =$$

$$= \left(\frac{5}{3} + \frac{1}{12} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\right) \lambda a + \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) \lambda b =$$

$$= \lambda a + \frac{4}{3} \lambda b \overset{\text{delog.}}{=} \lambda a + \frac{4 \lambda b}{3} = \lambda a + \frac{\lambda b^4}{3} =$$

$$= \lambda a + \lambda \underline{\sqrt[3]{b^4}} = \lambda \underline{a \sqrt[3]{b^4}} = \lambda \underline{ab\sqrt[3]{b}}.$$

B.

In der Rechnung mit Zifferzahlen.

§. 69.

Sollen die Erleichterungen, welche, wie wir oben gesehen, die Rechnung mit den Logarithmen statt mit den Zahlen selbst gewährt, auch für die Rechnung mit Zifferzahlen eintreten, so reicht es nicht hin, bloß formell die Logarithmen der vorkommenden Zahlen zu setzen, wie wir das bei der Buchstaben-Rechnung gethan, sondern wir müssen die Logarithmen selbst, in Einer Zahl (Zifferzahl natürlich) ausgedrückt, hiezu kennen. Was nun die Darstellung dieser Logarithmen betrifft, so ist, da die Zahlen oder die Potenzen ohne Weiteres gegeben sind, die erste Frage nach der zweiten Zahl, welche dazu gegeben sein muß, nemlich nach der Basis oder dem Dignande. Nun haben wir bei der Rechnung mit Buchstabenzahlen bereits gesehen, daß die Vortheile der Rechnung mit den Logarithmen nur dann möglich werden, wenn man alle in einer Aufgabe vorkommenden Zahlen auf dieselbe Basis logarithmirt. Demgemäß brauchen wir zu unserm Zwecke keineswegs die Logarithmen aller Zahlen auf alle möglichen Dignande, es ist hinreichend, sie nur auf Einen Dignand zu kennen. Wäre das nicht der Fall, so hätte man die Rechnung mit den Logarithmen wohl nie aufgegriffen: so schwierig war es (und wir werden von dieser Schwierigkeit uns noch selbst überzeugen), die Logarithmen der Zahlen auch nur für Eine Basis wirklich herzustellen. Als diese Basis der Logarithmen hat man aus Gründen, die wir sogleich kennen lernen werden, es vortheilhaft gefunden, die Basis 10 unsers Zahlensystems zu wählen. Die Berechnung selbst hat zuerst Henry Briggs, Professor der Geometrie zu Oxford, für die Zahlen von 1 — 20000 und von 90000 — 100000, der Holländer Adrian Vlacq aber für die von 20000—90000 ausgeführt, während John Napier, Baron von Marchiston, als Erfinder (1614) der Logarithmen-Rechnung überhaupt gilt. Die so berechneten Logarithmen hat man in Tabellen gebracht, die unter dem Namen der Logarithmen-Tafeln bekannt sind. Unsere Aufgabe nun ist, zu zeigen, wie vermittelst dieser Tafeln sowohl die Logarithmen für die Zahlen, als auch umgekehrt für die Logarithmen die entsprechenden Zahlen gefunden werden. Damit aber diese Un-

terweisung vollständig begriffen werde, müssen wir noch folgende zwei Sätze voranstellen und ihre Anwendung auf die Logarithmen der Basis 10 näher entwickeln.

Es sei nemlich A eine Zahl zwischen 1—10, worunter eben nicht bloß die ganzen Zahlen, sondern auch alle beliebigen unächten Brüche innerhalb dieser Gränzen, begriffen sein können, so ist

$$\log A > \log 1 < \log 10,$$

daher $\log A > 0^*) < 1$, d. h.

der Logarithmus von A ist irgend ein ächter Bruch und zwar sei er, wie das in den Tafeln durchweg der Fall ist, als Dezimalbruch ausgedrückt.

Nun ist

a) $\log A \times 10^n = \log A + n \log 10 = \log A + n = n + \log A$;

b) $\log \frac{A}{10^n} = \log A - n \log 10 = \log A - n.$

Alle diese durch $A \times 10^n$ oder $\frac{A}{10^n}$ ausgedrückten Zahlen nun sind mit den nämlichen Ziffern geschrieben,**) während die Werthe ihrer höchsten Ziffer und damit die der Zahlen selbst je nach den Werthen von n in a) sowohl als in b) sehr verschieden sein können. Es entspricht aber auch in den Logarithmen dieser Zahlen, die durchaus aus zwei Theilen bestehen, der eine Theil dem, was die Zahlen Gemeinsames, der andern dem, was sie Verschiedenes haben, nemlich

1) den gemeinschaftlichen Ziffern der allen dadurch ausgedrückten Zahlen angehörige Dezimalbruch ($\log A$),
2) den verschiedenen Werthen der Zahlen die davon abhängigen in a) positiven, in b) negativen, jenen Dezimalbruch begleitenden Ganzen (n).

---

*) $\log_{10} 1 = \log_{10} 10^0 = 0$, während $\log_{10} 10 = \log_{10} 10^1 = 1$ gemäß dem Grundsatze I. des §. 64.

**) Ist z. B. $A = 5{,}7432$, so ist $A \times 10^1 = 57{,}432$, oder $A \times 10^2 = A \times 100 = 574{,}32$; ebenso $\frac{A}{10} = 0{,}57432$ oder $\frac{A}{10^3} = \frac{A}{1000} = 0{,}0057432$.

Den erstern bloß von den Ziffern einer Zahl abhängigen Theil oder die Dezimalen eines Logarithmus nennt man dessen Mantisse, den letztern Theil aber oder die bloß von dem Werthe der Zahl abhängenden Ganzen ihres Logarithmus die Charakteristik desselben.

§. 70.

Eben jene Mantissen nun sind es, welche für alle möglichen Combinationen von Ziffern (bis zu fünf Zifferstellen) in den sogenannten Logarithmentafeln enthalten sind; diese Charakteristiken aber für alle beliebigen Zahlen selbst zu bestimmen, bieten uns obige Sätze unter a) und b) ganz einfache Vorschriften an die Hand.

a) Erhält nämlich in der Gleichung a) der Exponent n nach einander die Werthe 1, 2, 3..., so hat A oder genauer gesprochen, die höchste Ziffer von A nacheinander die Werthe eines Zehners, Hunderters, Tausenders u. s. w., aber auch die Logarithmen von A haben gemäß $\lambda\underline{A \times 10} = 1 + \lambda A$, $\lambda\underline{A \times 100} = 2 + \lambda A$, $\lambda\underline{A \times 1000} = 3 + \lambda A$ u, s. w. nacheinander obige Werthe von n, nemlich 1, 2, 3... zu Charakteristiken. Es sind aber jene n nichts Anderes als die Exponenten der resp. Werthfaktoren*) der höchsten Ziffer der Zahl A, woraus hervorgeht, daß die Charakteristiken ganzer Zahlen den Exponenten der Werthfaktoren ihrer höchsten Ziffer gleich sind.

b) Ebenso wenn in b) der Exponent n nacheinander die Werthe 1, 2, 3.... annimmt, erhält die höchste Ziffer von A nacheinander die Werthe von Zehnteln, Hunderteln, Tausendeln u. s. w., die entsprechenden Logarithmen aber erhalten gemäß $\lambda\left|\frac{A}{10} = \lambda A - 1\right.$, $\lambda\left|\frac{A}{100} = \lambda A - 2\right.$, u. s. w., die Zahlen $-1, -2, -3...$,

*) In 5380 z. B., welches $= 5 \times 1000 + 3 \times 100 + 8 \times 10$, sind die Zahlen 1000, 100, 10 offenbar diejenigen Faktoren, welche die entsprechenden Werthe der Zahlen 5, 3, 8 angeben, also offenbar deren Werthfaktoren, womit denn der Gebrauch dieses Wortes erklärt ist.

d. i. die Werthsfaktoren der höchsten Ziffer der Zahl A zu Charakteristiken, so daß also auch für die Dezimalbrüche dieselbe Regel hinsichtlich der Bestimmung ihrer Charakteristiken gilt, die wir oben für die ganzen Zahlen gefunden haben.

Die angegebene, allgemein, d. h. für alle im Dezimalsysteme ausgedrückten Zahlen geltende Regel wird wohl auch für ganze Zahlen und für Dezimalbrüche getrennt gegeben. Weil nemlich die ganzen Zahlen, deren höchste Ziffer

eine Einheit ist, mit 1 Ziffer,
ein Zehner „ „ 2 Ziffern,
„ Hunderter „ „ 3 „
„ Tausender „ „ 4 „ u. s. w.

geschrieben werden, aber deren Logarithmen in diesen Fällen nacheinander $0 = 1-1$, $1 = 2-1$, $2 = 3-1$, $3 = 4-1$, allgemein $n-1$ zur Charakteristik haben, wenn n die Anzahl der Zifferstellen, welche die Zahl enthält, so leitet man hieraus die Regel ab:

„Die Charakteristik des Logarithmus einer ganzen Zahl ist gleich der um 1 verminderten Anzahl ihrer Zifferstellen."

Ebenso, weil ein Dezimalbruch, dessen höchste Ziffer den Werth von Zehnteln hat, mit 1 vorausgehendem Null,
„ „ „ Hunderteln „ „ 2 vorausgehenden Nullen,
„ „ „ Tausendeln „ „ 3 „ „ u. s. w.

geschrieben wird, aber in diesen Fällen dessen Logarithmus nacheinander -1, -2, -3, allgemein $-n$ zur Charakteristik hat, wenn n die Anzahl der den geltenden Ziffern vorausgehenden Nullen bedeutet, so haben wir als hieraus abgeleitete zweite Regel:

„Die Charakteristik des Logarithmus eines Dezimalbruches ist gleich der Anzahl der den geltenden Ziffern vorangehenden Nullen, aber negativ."

§. 71.

Es erübrigt nun, um für jede beliebige Zahl vermittelst der Logarithmentafeln ihren Logarithmus bestimmen zu können, nur noch, zu zeigen, wie, d. h. in welcher Anordnung dieselben für die verschiedenen Combinationen von Ziffern die entsprechenden

Mantissen enthalten. In der folgenden hierüber gegebenen Anweisung beziehe ich mich auf die in Deutschland wohl am meisten verbreiteten Tafeln des Freiherrn von Vega. Diese enthalten:

1) Für 1-, 2- und 3ziffrige Zahlen die Charakteristik sowohl als die Mantisse unmittelbar neben der entsprechenden Zahl,*) und zwar hier sowohl als in den folgenden Fällen die Mantisse immer zu 7 Dezimalstellen.

2) Für die 4 ziffrigen Zahlen (von 1000 bis 9999), welche eine erste Spalte in fortlaufender Reihe, je 50 auf einer Seite, enthält, steht die entsprechende Mantisse (ohne Charakteristik) in einer zweiten oben mit 0 bezeichneten Spalte nebenan.

3) Auch für 5 ziffrige Zahlen sind die Mantissen in diesen Tafeln noch vollständig enthalten, aber mit folgender Abänderung: Von den Zahlen selbst enthält die schon unter 2) angeführte erste Vertikalspalte nur die vier ersten Ziffern in fortlaufender Reihe, mit der fünften Ziffer aber sind in der zweiten Querspalte von oben die weitern Vertikalspalten von 0 bis 9 bezeichnet. Wie die Zahlen selbst, so sind auch ihre Mantissen getheilt angegeben: es stehen nemlich die ersten drei Ziffern der Mantisse unmittelbar neben den ersten 4 Ziffern der Zahl in der zweiten mit 0 bezeichneten Spalte, oder es sind, wenn ihre Stelle leer gelassen ist, die zunächst darüber stehenden **) 3 Ziffern hinzudenken; die letzten 4 Ziffern der Mantisse aber finden sich in der Zeile der ersten 4 Ziffern der Zahl, aber in der Vertikalspalte, welche oben mit der fünften Ziffer der Zahl bezeichnet ist.

4) Für eine 6 ziffrige Zahl enthalten die Tafeln den Logarithmus nicht mehr, aber die bei der Berechnung der Logarithmen gemachte Erfahrung, daß für Zahlen, welche in den ersten 5 Ziffern

---

*) Es versteht sich wohl von selbst, daß die Tafeln diese Zahlen in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander folgend enthalten.

**) In den Fällen, in welchen, wenn die zunächst darüber stehenden drei Ziffern hinzugedacht würden, der Logarithmus einer folgenden Zahl kleiner würde als der einer vorhergehenden, sind die zunächst darunter stehenden ersten drei Ziffern der Mantisse zu nehmen. In den Tafeln ist dieß durch Sternchen bemerkt, welche bei den entsprechenden vier letzten Ziffern der Mantisse stehen.

übereinstimmen, die Differenzen zwischen den Zahlen proportional seien den Differenzen zwischen ihren Logarithmen, gibt uns ein Mittel an die Hand, auch für solche Zahlen die Mantisse zu berechnen. Es sei z. B. der Logarithmus der Zahl 384754 zu bestimmen, so ist gemäß der vorausgehenden Nummer 3)

$$\begin{aligned} \log 384760 &= 5{,}5851899, \\ \log 384750 &= 5{,}5851786, \\ &\quad\overline{\quad\quad 113}; \end{aligned}$$

während also diese 6ziffrigen Zahlen um 10, differiren ihre Logarithmen um 113. Aber unsere gegebene 6ziffrige Zahl 384754 differirt von der kleinern dieser Zahlen 384750 um 4, mithin können wir für die uns unbekannte Differenz (x) zwischen dem Logarithmus dieser letzteren und dem der gegebenen Zahl nach obigem Satze die Proportion *) ansetzen:

Zahl-Diff. Zahl-Diff. Log.-Diff. Log.-Diff.

$$10 : 4 = 113 : x,$$

$$\text{woraus } x = \frac{4 \cdot 113}{10} = \frac{452}{10} = 45,$$

um welche 45 der $\log 384754 > \log 384750$; addirt man also zu diesem letztern die gefundene Differenz 45, so hat man den gesuchten Logarithmus; es ist somit $\log 384754 = 5{,}5851831$.

Will man das ganze Verfahren in eine Regel zusammenfassen, so lautet diese:

„Man suche die Mantisse für die ersten fünf Ziffern der Zahl, bestimme die Differenz zwischen dieser und der in den Tafeln zunächst folgenden Mantisse, berechne hieraus vermittelst obiger Proportion die für die sechste Ziffer treffende Logarithmen-Differenz und addire diese zur bereits gefundenen Mantisse."

---

*) Wenn wir auch die Lehre von den Proportionen noch nicht entwickelt, so wird doch das Rechnen mit einer solchen, im Regel de tri-Ansatze als von der Arithmetik her wohl bekannt vorausgesetzt.

z. B. $\wedge\underline{271093} = 5{,}4331183$

1135 *)

$$\left|\begin{array}{c} 10:3 = 160:x \\ x = 48 \end{array}\right| \quad 48$$

5) Bei einer 7ziffrigen Zahl kann für die 6te und 7te Ziffer zugleich derselbe Satz, wie eben für die 6te allein, in Anwendung gebracht und so, durch Hinzufügung der für diese beiden Ziffern treffenden Logarithmen-Differenz zur Mantisse für die ersten fünf Ziffern, die Mantisse der ganzen 7ziffrigen Zahl bestimmt werden.

Es sei z. B. $\wedge\underline{3087547}$ gesucht, so ist:

$$\wedge\underline{3087600} = 6{,}4896210,$$

$$\wedge\underline{3087500} = 6{,}4896070;$$

$$\overline{140}$$

für die Zahlen-Differenz 100 ist also die Logarithmen-Differenz 140; mithin haben wir, da unsere gegebene Zahl die kleinere 3087500 der beiden obigen um 47 übertrifft, die Proportion:

$$100:47 = 140:x,$$

$$x = \frac{658}{10} = 66,$$

daher $\wedge\underline{3087547} = 6{,}4896136.$

Oder kürzer:

$$\wedge\underline{3087547} = 6{,}4896136$$

$$6070$$

$$\left|\begin{array}{c} 100:47 = 140:x \\ x = 66 \end{array}\right| \quad 66$$

6) Uebrigens bieten die Vega'schen Tafeln in der Art eine Erleichterung dar, daß sie die für die sechste Ziffer treffende Logarithmen-Differenz in der letzten mit P. P. (partes proportionales) überschriebenen Spalte bereits berechnet enthalten. Diese Spalte ist nemlich durch einen vertikalen Strich wieder in zwei Spalten abgetheilt, von denen die links die fortlaufenden Zahlen 1, 2....9 als die möglichen sechsten Ziffern, die Spalte rechts aber erst die

*) Es ist gut, die Mantisse für die ersten fünf Ziffern, wie hier, so anzusetzen, daß die vollständige Mantisse für die sechs Ziffern in Einer Linie zu stehen komme.

aufeinander folgenden Haupt- und darunter neben den Ziffern 1, 2 .... 9 die auf sie treffenden einzelnen Logarithmen-Differenzen enthält.

Dieselben Logarithmen-Differenzen können aber auch gleich für die siebente Ziffer benützt werden. Die siebente Ziffer hat nemlich den zehnten Theil des Werthes, den sie an der sechsten Zifferstelle hätte, mithin trifft auf sie auch der zehnte Theil der für die entsprechende sechste Ziffer berechneten Differenz. Addirt man sonach die für die sechste und die so für die siebente Ziffer gefundenen Differenzen zur Mantisse für die ersten fünf Ziffern, so erhält man die Mantisse für die sieben Ziffern vollständig.

z. B. $\Lambda\underline{3700857} = 6{,}5863023$

2956 (für die 5te Ziffer 8)
59 (für die 6te Ziffer 5)
8 (für die 7te Ziffer 7).

§. 72.

Nachdem wir durch die Vorschriften der §§. 70 und 71 in den Stand gesetzt sind, für jede im Dezimalsystem ausgedrückte Zahl den vollständigen Logarithmus anzugeben, ist noch übrig, die Anweisung zu geben für die umgekehrte Aufgabe, wie nemlich die Zahl herzustellen sei, der ein gegebener Logarithmus angehört.

Zuvörderst muß hier ausdrücklich bemerkt werden, daß wir keine andern Logarithmen kennen, als solche,

a) deren Mantisse positiv,
b) deren Charakteristik eine ganze Zahl ist.

Hat nun der gegebene Logarithmus diese Form, (hätte er sie nicht, so müßte er vor dem Delogarithmiren darauf gebracht werden), so werden

a) aus der Mantisse die dazu gehörigen Ziffern der Zahl hergestellt,
b) durch die Charakteristik aber der Werth der höchsten Ziffer und sonach der der Zahl selbst bestimmt.

ad a) Was die Herstellung der Ziffern durch die Mantisse betrifft, so sind zwei Fälle möglich:

1) entweder ist die gegebene Mantisse vollständig in den Tafeln enthalten,
2) oder sie ist es nicht.

Ist das Erstere der Fall, so schreibe man die fünf Ziffern aus, zu denen die fragliche Mantisse nach der Vorschrift 3) des §. 71 gehört, und man hat damit die Ziffern der gesuchten Zahl.

Ist aber der gegebene Logarithmus nicht vollständig in den Tafeln zu finden, so besteht er, wie wir aus 4) und 5) des §. 71 wissen, aus zwei Theilen, nemlich

1) aus einer für die ersten fünf Ziffern der Zahl geltenden in den Tafeln vollständig enthaltenen Mantisse,
2) aus einem für die sechste und siebente Zifferstelle treffenden Zusatze zu dieser Mantisse.

Der erstere Theil ist immer diejenige Mantisse, welche man als die der gegebenen am nächsten kommende aber kleinere in den Tafeln trifft; aus dieser Mantisse nun werden wie oben die fünf ersten Ziffern der Zahl hergestellt.

Der Ueberschuß der gegebenen Mantisse über die nächst kleinere in den Tafeln gefundene ist natürlich das, was wir oben als Zusatz für die sechste und siebente Ziffer bezeichnet haben; aus diesem Ueberschuß oder der Logarithmen-Differenz berechnet sich die treffende Zahlen-Differenz mit Hilfe derselben Proportion, die wir in §. 71 zur umgekehrten Aufgabe benützt haben, und zwar wird hiedurch die sechste und siebente Ziffer der Zahl immer zugleich bestimmt, z. B.

$$0{,}7661561 = \sqrt{5{,}836548}$$

$$\begin{array}{r} 1525 \\ \hline 36 \end{array}$$

Log.-Diff.	Log.-Diff.	Zahl.-Diff.	Zahl-.Diff.
74	: 36 =	100	: x

woraus $x = \frac{3600}{74} = 48$, welche 4 und 8 denn zu den zuvor gefundenen 5 Ziffern gesetzt die volle 7ziffrige Zahl geben.

Mit Hilfe der nach 6) des vorigen §. in den Vega'schen Tafeln enthaltenen Proportional-Theile läßt sich ohne weitere Rechnung aus obigem Ueberschuße der gegebenen über die in den Tafeln enthaltene nächst kleinere Mantisse erst die sechste und, wenn nach Subtraktion der zur sechsten Ziffer gehörigen Logarithmen-Differenz von jenem Ueberschuße noch ein Rest bleibt, auch die diesem Reste entsprechende siebente Ziffer bestimmen.

z. B. $0{,}7661561 = \sqrt{5{,}836548}$

1525

36

30

6

(Unter der hier geltenden allgemeinen Differenz 74 steht zwar der Proportional-Theil 36 nicht, wohl aber 30 als nächst kleinerer, der der Zahl 4 als sechster Ziffer angehört; dem Reste 6 kommt, wenn man die hieher gehörigen Proportional-Theile durch 10 dividirt, um daraus die für die 7te Ziffer geltenden herzustellen, die Zahl 5,9 am nächsten, welche der Ziffer 8 angehört, weßwegen 8 die gesuchte 7te Ziffer ist.)*)

ad b) Was den durch die Charakteristik (n) zu bestimmenden Werth der höchsten Ziffer und damit den der Zahl selbst betrifft, so hat diese höchste Ziffer,

a) wenn n positiv und nacheinander $= 0, 1, 2, 3 \ldots$, nacheinander den Werth von Einheiten, Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w.,

b) wenn n negativ und nacheinander $= -1, -2, -3, -\ldots$, den Werth von Zehnteln, Hunderteln, Tausendeln u. s. w.,

wodurch sich in beiden Fällen die Stelle der Einheiten leicht bestimmen läßt.

Man gibt diese Regeln auch wohl umgekehrt von den im §. 70 am Ende gegebenen in folgender Weise:

a) wenn n positiv, so hat die Zahl der ganzen Ziffernstellen um Eine mehr, als die Charakteristik Einheiten enthält,

b) ist aber n negativ, so ist die Zahl ein ächter Dezimalbruch mit so vielen den geltenden Ziffern vorangehenden Nullen, als die Charakteristik Einheiten hat.

---

*) Bei der Auffuchung der siebenten Ziffer bleibt das Verhältniß der Proportional-Theile dasselbe, ob man die in den Tafeln enthaltenen durch 10 dividirt, wie wir hier gethan, oder umgekehrt den als Rest bleibenden Proportional-Theil, hier 6, mit 10 multiplizirt, wodurch wir in unserm Falle 60 erhalten, dem 59 am nächsten kommt und so 8 als die 7te Ziffer bezeichnet. Letzteres Verfahren ist offenbar das bequemere und wird daher gewöhnlich eingehalten.

Beispiele.

1) $32{,}0377 \times 1{,}008056 = 32{,}2958.$

Entwicklung.

$$\mathcal{L}\underline{32{,}0377 \times 1{,}008056} = \mathcal{L}\underline{32{,}0377} + \mathcal{L}\underline{1{,}008056} =$$
$$= 1{,}5091460 = \mathcal{L}\underline{32{,}2958.}$$

Nebenrechnung.

$\mathcal{L}\underline{32{,}0377}$	$= 1{,}5056613$	$1{,}5056613$
	6518	$0{,}0034847$
	95	$1{,}5091460$
$\mathcal{L}\underline{1{,}008056}$	$= 0{,}0034847$	1353
	4605	107
	216	107
	26	$—$

2) $\left(\frac{7}{8}\right)^6 = 0{,}448795.$

a. $$\mathcal{L}\underline{\left(\frac{7}{8}\right)^6} = 6\,\mathcal{L}\underline{\frac{7}{8}} = 6\,\mathcal{L}7 - 6\,\mathcal{L}8 =$$
$$= 6 \times 0{,}8450980 - 6 \times 0{,}9030900 = 0{,}6520480 - 1 =$$
$$= \mathcal{L}\underline{0{,}448795.}$$

Nebenrechnung.

		oder	
$6\,\mathcal{L}7$	$= 5{,}0705880$	$6\,\mathcal{L}7$	$= 5{,}0705880$
$-6\,\mathcal{L}8$	$= -5{,}4185400$	$-6\,\mathcal{L}8$	$= 4{,}5814600 - 10$
	$-0{,}3479520$		$9{,}6520480 - 10$
*)	$= 1 - 0{,}3479520 - 1$		$= 0{,}6520480 - 1.$
	$= 0{,}6520480 - 1;$		0432
			48
			48
			$—$

*) Da wir keine negative Mantisse brauchen können, so müssen wir, um sie positiv zu machen, eine positive Größe, wozu hier 1 schon hinreicht, hinzufügen, natürlich aber dieselbe Größe am Ende mit -1 wieder subtrahiren. Dieses Positivmachen der Mantisse geschieht, wie nebenstehend, gewöhnlich schon bei den einzelnen Summanden, und man heißt den für den negativen Logarithmus gesetzten Ausdruck mit positiver Mantisse dessen decadische Ergänzung (D. E.).

b. $\lambda\left(\frac{7}{8}\right)^6 = 6\,\lambda\frac{7}{8} = 6\,\lambda\underline{0{,}875} = 6 \times (0{,}9420081 - 1) =$

$= 5{,}6520486^{*}) - 6 = 0{,}6520486 - 1 = \lambda\underline{0{,}4487956}.$

0432
54
48
60

3) $\sqrt[5]{\frac{0{,}3897542}{0{,}0257008}} = 1{,}722538.$

Entwicklung.

$\lambda\sqrt[5]{\frac{0{,}3897542}{0{,}0257008}} =$

$= \frac{1}{5}\,\lambda\frac{0{,}3897542}{0{,}0257008} = \frac{1}{5}\,\lambda\underline{0{,}3897542} - \frac{1}{5}\,\lambda\underline{0{,}0257008} =$

$= \frac{1}{5} \times (0{,}5907908 - 1) - \frac{1}{5} \times (0{,}4099466 - 2) =$

$= \frac{1}{5} \times (4{,}5907908 - 5^{**}) - \frac{1}{5} \times (3{,}4099466 - 5) =$

$= 0{,}9181582 - 1 - (0{,}6819893 \underset{(+)}{\overset{(-)}{}} 1) =$

$= 0{,}9181582 - 1 + 0{,}3180107 =$

$= 0{,}2361689 = \lambda\underline{1{,}722538}.$

1592
978
76
210
202
8

(Nebenrechnung: Siehe auf der folgenden Seite.)

*) Dieser Logarithmus differirt von dem unter a) gefundenen um 6, was aber nur der Ungenauigkeit zuzuschreiben ist, welche hinsichtlich der letzten (7ten) Dezimalstelle der Mantisse nicht vermieden werden kann. Um nemlich die 7te Dezimalstelle doch genau zu haben, wird die 8te ebenfalls berechnet; ist diese nun < 5, so wird die 7te unverändert in den Tafeln aufgenommen, ist sie aber > 5, so wird die 7te um 1 vermehrt. So kann es denn kommen, daß man, wenn man bloß mit 7 Dezimalstellen rechnet, die Differenz zweier Logarithmen z. B. hier $\lambda 7 - \lambda 8$ um 1 kleiner findet, als sie sich, wenn mit 8 Dezimalstellen gerechnet wird, herausstellt. Dieser Unterschied von 1 ist denn bei unserm Beispiele noch überdieß durch Multiplikation mit 6 versechsfacht.

**) Da wir nur Ganze zu Charakteristiken haben können, jedoch, wenn wir unsere

Nebenrechnung.

$$\wedge\underline{0{,}3897542} = 0{,}5907908 - 1;$$
$$7861$$
$$45$$
$$2$$

$$\wedge\underline{0{,}0257008} = 0{,}4099466 - 2.$$
$$9331$$
$$135$$

4) $$\frac{\sqrt[2]{841{,}0736} \times \sqrt[3]{4{,}253}}{(21{,}0075)^4 \times \sqrt[4]{0{,}0479}} = 0{,}0005157041.$$

Entwicklung.

$$\wedge\frac{\sqrt[2]{a}\sqrt[3]{b}\ *)}{c^4\sqrt[4]{d}} = \wedge\sqrt[2]{a}\sqrt[3]{b} - \wedge c^4\sqrt[4]{d} =$$
$$= \wedge\sqrt[2]{a} + \wedge\sqrt[3]{b} - \wedge c^4 - \wedge\sqrt[4]{d} =$$
$$= \frac{1}{2}\wedge a + \frac{1}{3}\wedge b - 4\wedge c - \frac{1}{4}\wedge d = 0{,}7124006 - 4 =$$
$$= \wedge\underline{0{,}0005157041.}$$

Nebenrechnung.

$$\frac{1}{2}\wedge a = \frac{1}{2}\wedge\underline{841{,}0736} = \frac{1}{2} \times 2{,}9248340 = 1{,}4624170;$$
$$8321$$
$$16$$
$$3$$

$$\frac{1}{3}\wedge b = \frac{1}{3}\wedge\underline{4{,}253} = \frac{1}{3} \times 0{,}6286954 = 0{,}2095651;$$

$$-4\wedge c = -4\wedge\underline{21{,}0075} = -4 \times 1{,}3223744 =$$
$$3640$$
$$104$$

$$= \overset{+10}{-} 5{,}2894976 \overset{-10}{=} 4{,}7105024 - 10;$$

$$-\frac{1}{4}\wedge d = -\frac{1}{4}\wedge\underline{0{,}0479} = -\frac{1}{4} \times (\overset{2}{0}{,}6803355 - \overset{4}{2}) =$$

$$= -(\underset{(-)}{0{,}6700839} - \underset{(+)}{1}) = 0{,}3299161.$$

Logarithmen, wie sie stehen, durch 5 dividiren würden, die Charakteristiken Brüche würden, so mußten wir dieselben, wie wir gethan, umändern, daß sie durch 5 dividirbar würden.

*) Die gegebenen Zifferzahlen werden hier der Bequemlichkeit wegen im Laufe der logarithmischen Entwicklung durch Buchstaben ersetzt.

Summation.

1,4624170
0,2095651
4,7105024 — 10
0,3299161
6,7124006 — 10

3971
35
34
10.

5) $\dfrac{\frac{1}{6}\sqrt[3]{0,04379856}}{(0,3003093)^3 \times (0,8503293)^2} = 3.$

Entwicklung.

$$\Lambda\left[\frac{a\sqrt[3]{b}}{c^3d^2}\right] = \Lambda\left[a\sqrt[3]{b}\right] - \Lambda\left[c^3d^2\right] =$$

$$= \Lambda a + \frac{1}{3}\Lambda b - 3\Lambda c - 2\Lambda d = 0,4771213 = \Lambda 3.$$

Nebenrechnung.

$$\Lambda a = \Lambda\underline{0,1666666}\ldots. = 0,2218487 - 1;$$

8314
156
15(6
1(5

$$\frac{1}{3}\Lambda b = \frac{1}{3}\Lambda\underline{0,04379856} = \frac{1}{3} \times (0,6414599 - 2) =$$

4543
50
6

$$= 0,5471533 - 1;$$

$$-3\Lambda c = -3\Lambda\underline{0,3003093} = -3 \times (0,4775688 - 1) =$$

5553
131
4

$$= -\left(\underset{(-)}{1,4327064} - \underset{(+)}{3}\right) = 1,5672936;$$

$$-2\Lambda d = -2\Lambda\underline{0,8503293} = -2 \times (0,9295871 - 1) =$$

5824
46
1(5

$$= -\left(\underset{(-)}{1,8591743} - \underset{(+)}{2}\right) = 0,1408257.$$

Summation.

0,2218487 — 1
0,5471533 — 1
1,5672936
0,1408257
2,4771213 — 2.

6) $\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{5}\sqrt[2]{0,734}}{(0,78)^4\sqrt[3]{\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}}}} = 0,501996.$

Entwicklung.

$$\Lambda\sqrt[3]{\frac{a\sqrt[2]{b}}{c^4\sqrt[3]{d^{-2}}}} = \frac{1}{3}\Lambda a\sqrt[2]{b} - \frac{1}{3}\Lambda c^4\sqrt[3]{d^{-2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\Lambda a + \frac{1}{6}\Lambda b - \frac{4}{3}\Lambda c - \frac{1}{9}\Lambda d^{-2} =$$

$$= \frac{1}{3}\Lambda a + \frac{1}{6}\Lambda b - \frac{4}{3}\Lambda c + \frac{2}{9}\Lambda d =$$

$$= 0,7007003 - 1 = \Lambda 0,501996.$$

Nebenrechnung.

$$\frac{1}{3}\Lambda a = \frac{1}{3}\Lambda 0,2 = \frac{1}{3}\times(\overset{2}{0},3010300 - \overset{3}{1}) = 0,7670100 - 1;$$

$$\frac{1}{6}\Lambda b = \frac{1}{6}\Lambda 0,734 = \frac{1}{6}\times(\overset{5}{0},8656961 - \overset{6}{1}) = 0,9776160 - 1;$$

$$-\frac{4}{3}\Lambda c = -\frac{4}{3}\Lambda 0,78 = -\frac{4}{3}\times(0,8920946 - 1) =$$

$$= -\frac{1}{3}\times(\overset{2}{3},5683784 - \overset{3}{4}) = -\left(\underset{(-)}{0,8561261} - \underset{(+)}{1}\right) =$$

$$= 0,1438739;$$

$$\frac{2}{9}\Lambda d = \frac{2}{9}\Lambda 0,1428571\ldots = \frac{2}{9}\times(0,1549019 - 1) =$$

8802
213
3
1

$$= \frac{1}{9}\times(\overset{7}{0},3098038 - \overset{9}{2}) = 0,8122004 - 1.$$

Summation.

0,7670100 — 1
0,9776160 — 1
0,1438739
0,8122004 — 1
2,7007003 — 3

6951
52
52
—.

7) $\sqrt[5]{10} + \frac{1}{8}\sqrt[4]{10} = 1{,}584893 + 0{,}2222849 = 1{,}8071779.$

a. $\wedge\sqrt[5]{10} = \frac{1}{5}\wedge 10 = \frac{1}{5} = 0{,}2000000 = \wedge 1{,}584893;$

1999745
255
247
80

b. $\wedge\frac{1}{8}\sqrt[4]{10} = \wedge 0{,}125 + \frac{1}{4}\wedge 10 =$

$= 0{,}0969100 - 1 + \frac{1}{4} = 0{,}3469100 - 1 = \wedge 0{,}2222849;$

0,0969100 — 1
0,2500000
0,3469100 — 1

9004
96
78
180.

8) $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}} = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + 1{,}44225}} =$

$= \sqrt[3]{3 + 1{,}64387} = 1{,}668374.$

a. $\wedge\sqrt[3]{3} = \frac{1}{3}\wedge 3 = \frac{1}{3} \times 0{,}4771213 = 0{,}1590404 =$

$= \wedge 1{,}44225;$

0255
149
150
—

b. $\Lambda\sqrt[3]{4{,}44225} = \frac{1}{3}\Lambda 4{,}44225 = \frac{1}{3} \times 0{,}6476030 =$

$= 0{,}2158677 = \Lambda 1{,}64387$;

8490
187
185
—
—

c. $\Lambda\sqrt[3]{4{,}64387} = \frac{1}{3}\Lambda 4{,}64387 = \frac{1}{3} \times 0{,}6668801 =$

$= 0{,}2222934 = \Lambda 1{,}668374.$

2741
193
183
100

§. 73.

Bisher haben wir die in den Tafeln enthaltenen Logarithmen der Zahlen gebraucht, ohne uns von ihrer Entstehung irgend Rechenschaft zu geben. Es wäre aber nicht bloß höchst unwissenschaftlich, wenn wir darüber so ganz hinweggingen und so in irgend einem Theile unserer Lehre ein Dunkel ließen, sondern es ist auch nicht uninteressant, zu erfahren, welche Schwierigkeiten die Erfinder und ersten Benützer der Logarithmen-Rechnung hiebei zu überwinden hatten. Wir werden also im Folgenden die Wege bezeichnen, welche von diesen zur Herstellung der Logarithmen eingeschlagen worden sind.

Vor Allem mußten die Logarithmen der Primzahlen etwa bis 10000 bestimmt werden. Hiezu ging man von den bekannten Logarithmen der ganzen Potenzen von 10 aus und suchte die der dazwischen liegenden Zahlen, indem man folgenden Satz zu Grunde legte: Wenn $x = \sqrt[2]{ab}$, so ist $\Lambda x = \frac{\Lambda a + \Lambda b}{2}$. Sind nun die Zahlen a und b sowohl als auch ihre Logarithmen gegeben, so findet man einerseits die fragliche Zahl x, indem man aus dem Produkte der gegebenen Zahlen die Quadratwurzel zieht, andrerseits deren Logarithmus, indem man die Summe der gegebenen Logarithmen durch 2 dividirt. Dieses Verfahren hat man nun so lange fortzusetzen, bis obige Quadratwurzel die Zahl gibt, deren Loga-

rithmus man herstellen will und nun durch den zweiten Theil des Verfahrens auch hergestellt hat.

Ein Beispiel, etwa die Berechnung von $\sqrt{11}$, wird das Gesagte deutlicher machen.

1) Es sei $a_1 = 100$ und $b_1 = 10$, so ist

$$x_1 = \sqrt[2]{1000} = 31{,}6227766\,,$$

$$\text{und } \sqrt{x_1} = \frac{\sqrt{100} + \sqrt{10}}{2} = \frac{2+1}{2} = 1{,}5,$$

$$\text{mithin 1) } \sqrt{31{,}6227766} = 1{,}5000000.$$

2) Es sei $a_2 = 31{,}6227766$ und $b_2 = 10$, so ist

$$x_2 = \sqrt[2]{316{,}227766} = 17{,}782794,$$

$$\text{und } \sqrt{x_2} = \frac{\sqrt{31{,}6227766} + \sqrt{10}}{2} = \frac{1{,}5+1}{2} = 1{,}25,$$

$$\text{mithin 2) } \sqrt{17{,}782794} = 1{,}2500000.$$

3) Es sei $a_3 = 17{,}782794$ und $b_3 = 10$, so ist

$$x_3 = \sqrt[2]{177{,}82794} = 13{,}335214,$$

$$\text{und } \sqrt{x_3} = \frac{\sqrt{17{,}782794} + \sqrt{10}}{2} = \frac{1{,}25+1}{2} = 1{,}125,$$

$$\text{mithin 3) } \sqrt{13{,}335214} = 1{,}1250000.$$

4) $a_4 = 13{,}335214$ und $b_4 = 10$, so

$$x_4 = \sqrt[2]{133{,}35214} = 11{,}5478197\,,$$

$$\text{und } \sqrt{x_4} = \frac{\sqrt{13{,}335214} + \sqrt{10}}{2} = \frac{1{,}125+1}{2} = 1{,}0625,$$

$$\text{mithin 4) } \sqrt{11{,}5478197} = 1{,}0625000.$$

5) $a_5 = 11{,}5478197$ und $b_5 = 10$, so

$$x_5 = \sqrt[2]{115{,}478197} = 10{,}746078\,,$$

$$\text{und } \sqrt{x_5} = \frac{\sqrt{11{,}5478197} + \sqrt{10}}{2} = \frac{1{,}0625+1}{2} =$$

$$= 1{,}03125\,,$$

$$\text{mithin 5) } \sqrt{10{,}746078} = 1{,}0312500.$$

6) $a_6 = 11{,}5478197$ und $b_6 = 10{,}746078$, ſo

$$x_6 = \sqrt[2]{11{,}5478197 \times 10{,}746078} = \sqrt[2]{124{,}093770} =$$
$$= 11{,}139738,$$

und $$\wedge x_6 = \frac{\wedge 11{,}54\ldots. + \wedge 10{,}74\ldots.}{2} =$$
$$= \frac{1{,}0625000 + 1{,}0312500}{2} = 1{,}046875,$$

mithin 6) $\wedge 11{,}139738 = 1{,}0468750.$

7) $a_7 = 11{,}139738$ und $b_7 = 10{,}746078$, ſo

$$x_7 = \sqrt[2]{11{,}139738 \times 10{,}746078} = \sqrt[2]{119{,}708493} =$$
$$= 10{,}941138,$$

und $$\wedge x_7 = \frac{\wedge 11{,}13\ldots. + \wedge 10{,}74\ldots.}{2} =$$
$$= \frac{1{,}046875 + 1{,}03125}{2} = \frac{2{,}078125}{2} = 1{,}0390625,$$

mithin 7) $\wedge 10{,}941138 = 1{,}0390625.$

8) $a_8 = 11{,}139738$ und $b_8 = 10{,}941138$, ſo

$$x_8 = \sqrt[2]{11{,}139738 \times 10{,}941138} = \sqrt[2]{121{,}881410} =$$
$$= 11{,}039991,$$

und $$\wedge x_8 = \frac{\wedge 11{,}13\ldots. + \wedge 10{,}94\ldots.}{2} =$$
$$= \frac{1{,}046875 + 1{,}0390625}{2} = \frac{2{,}0859375}{2} = 1{,}0429687,$$

mithin 8) $\wedge 11{,}039991 = 1{,}0429687.$

9) $a_9 = 11{,}039991$ und $b_9 = 10{,}941138$, ſo

$$x_9 = \sqrt[2]{11{,}039991 \times 10{,}941138} = \sqrt[2]{120{,}790065} =$$
$$= 10{,}990453,$$

und $$\wedge x_9 = \frac{\wedge 11{,}03\ldots. + \wedge 10{,}94\ldots.}{2} =$$
$$= \frac{1{,}0429687 + 1{,}0390625}{2} = \frac{2{,}0820312}{2} = 1{,}0410156,$$

mithin 9) $\wedge 10{,}990453 = 1{,}0410156.$

10) $a_{10} = 11{,}039991$ und $b_{10} = 10{,}990453$, so

$$x_{10} = \sqrt[2]{11{,}039991 \times 10{,}990453} = \sqrt[2]{121{,}334502} = 11{,}015194,$$

und $$\sqrt{x_{10}} = \frac{\sqrt{11{,}03\ldots} + \sqrt{10{,}99\ldots}}{2} = \frac{1{,}0429687 + 1{,}0410156}{2} = \frac{2{,}0839843}{2} = 1{,}0419922,$$

mithin 10) $\sqrt{11{,}015194} = 1{,}0419922.$

11) $a_{11} = 11{,}015194$ und $b_{11} = 10{,}990453$, so

$$x_{11} = \sqrt[2]{11{,}015194 \times 10{,}990453} = \sqrt[2]{121{,}061971} = 11{,}002817,$$

und $$\sqrt{x_{11}} = \frac{\sqrt{11{,}01\ldots} + \sqrt{10{,}99\ldots}}{2} = \frac{1{,}0419922 + 1{,}0410156}{2} = \frac{2{,}0830078}{2} = 1{,}0415039,$$

mithin 11) $\sqrt{11{,}002817} = 1{,}0415039.$

12) $a_{12} = 11{,}002817$ und $b_{12} = 10{,}990453$, so

$$x_{12} = \sqrt[2]{11{,}002817 \times 10{,}990453} = \sqrt[2]{120{,}925942} = 10{,}996633,$$

und $$\sqrt{x_{12}} = \frac{\sqrt{11{,}00\ldots} + \sqrt{10{,}99\ldots}}{2} = \frac{1{,}0415039 + 1{,}0410156}{2} = 1{,}0412597,$$

mithin 12) $\sqrt{10{,}996633} = 1{,}0412597.$

13) $a_{13} = 11{,}002817$ und $b_{13} = 10{,}996633$, so

$$x_{13} = \sqrt[2]{11{,}002817 \times 10{,}996633} = \sqrt[2]{120{,}993940} = 10{,}999725,^{*})$$

und $$\sqrt{x_{13}} = \frac{\sqrt{11{,}002\ldots} + \sqrt{10{,}995\ldots}}{2} = \frac{1{,}0415039 + 1{,}0412597}{2} = 1{,}0413818,$$

mithin 13) $\sqrt{10{,}999725} = 1{,}0413818.$

---

*) Dieselbe Wurzel erhält man, da die beiden Faktoren a_{13} und b_{13} nur wenig mehr von einander differiren, wenn man, statt diese Faktoren, wie

14) $a_{14} = 11{,}002817$ und $b_{14} = 10{,}999725$, ſo

$$x_{14} = \frac{11{,}002817 + 10{,}999725}{2} = \frac{22{,}002542}{2} = 11{,}001271,$$

$$\text{und } \sqrt{x_{14}} = \frac{\sqrt{11{,}002\ldots.} + \sqrt{10{,}999\ldots.}}{2} =$$

$$= \frac{1{,}0415039 + 1{,}0413818}{2} = 1{,}0414429,$$

mithin 14) $\sqrt{11{,}001271} = 1{,}0414429.$

15) $a_{15} = 11{,}001271$ $\quad \sqrt{a_{15}} = 1{,}0414429$

$b_{15} = 10{,}999725$ $\quad \sqrt{b_{15}} = 1{,}0413818$

$22{,}000996$ $\qquad 2{,}0828247$

$\frac{22{,}000996}{2} =$ $\qquad \frac{2{,}0828247}{2} =$

$x_{15} = 11{,}000498$ $\quad \sqrt{x_{15}} = 1{,}0414123$

mithin 15) $\sqrt{11{,}000498} = 1{,}0414123.$

16) $a_{16} = 11{,}000498$ $\quad \sqrt{a_{16}} = 1{,}0414123$

$b_{16} = 10{,}999725$ $\quad \sqrt{b_{16}} = 1{,}0413818$

$22{,}000223$ $\qquad 2{,}0827941$

$\frac{22{,}000223}{2} =$ $\qquad \frac{2{,}0827941}{2} =$

$x_{16} = 11{,}000111$ $\quad \sqrt{x_{16}} = 1{,}0413970$

mithin 16) $\sqrt{11{,}000111} = 1{,}0413970.$

17) $a_{17} = 11{,}000111$ $\quad \sqrt{a_{17}} = 1{,}0413970$

$b_{17} = 10{,}999725$ $\quad \sqrt{b_{17}} = 1{,}0413818$

$21{,}999836$ $\qquad 2{,}0827788$

$\frac{21{,}999836}{2} =$ $\qquad \frac{2{,}0827788}{2} =$

$x_{17} = 10{,}999918$ $\quad \sqrt{x_{17}} = 1{,}0413894$

mithin 17) $\sqrt{10{,}999918} = 1{,}0413894.$

---

bisher, mit einander zu multipliziren und dann aus dem Produkte die Quadratwurzel zu ziehen, dieſelben einfach addirt und die Summe durch 2 dividirt. Es iſt nemlich: $11{,}002817$

$10{,}996633$

$\frac{21{,}999450}{2} = 10{,}999725$ wie oben.

Dieſe augenſcheinlich große Erleichterung werden wir denn in den weitern Berechnungen natürlich auch benützen.

18) $a_{18} = 11{,}000111$ $\quad\wedge\quad a_{18} = 1{,}0413970$

$b_{18} = 10{,}999918$ $\quad\wedge\quad b_{18} = 1{,}0413894$

$22{,}000029$ $\quad\quad$ $2{,}0827864$

$\frac{22{,}000029}{2} =$ $\quad\wedge\quad$ $\frac{2{,}0827864}{2} =$

$x_{18} = 11{,}000014$ $\quad\wedge\quad x_{18} = 1{,}0413932$

mithin 18) $\sqrt{11{,}000014} = 1{,}0413932.$

19) $a_{19} = 11{,}000014$ $\quad\wedge\quad a_{19} = 1{,}0413932$

$b_{19} = 10{,}999918$ $\quad\wedge\quad b_{19} = 1{,}0413894$

$21{,}999932$ $\quad\quad$ $2{,}0827826$

$\frac{21{,}999932}{2} =$ $\quad\wedge\quad$ $\frac{2{,}0827826}{2} =$

$x_{19} = 10{,}999966$ $\quad\wedge\quad x_{19} = 1{,}0413913$

mithin 19) $\sqrt{10{,}999966} = 1{,}0413913.$

20) $a_{20} = 11{,}000014$ $\quad\wedge\quad a_{20} = 1{,}0413932$

$b_{20} = 10{,}999966$ $\quad\wedge\quad b_{20} = 1{,}0413913$

$21{,}999980$ $\quad\quad$ $2{,}0827845$

$\frac{21{,}999980}{2} =$ $\quad\wedge\quad$ $\frac{2{,}0827845}{2} =$

$x_{20} = 10{,}999990$ $\quad\wedge\quad x_{20} = 1{,}0413923$

mithin 20) $\sqrt{10{,}999990} = 1{,}0413923.$

21) $a_{21} = 11{,}000014$ $\quad\wedge\quad a_{21} = 1{,}0413932$

$b_{21} = 10{,}999990$ $\quad\wedge\quad b_{21} = 1{,}0413923$

$22{,}000004$ $\quad\quad$ $2{,}0827855$

$\frac{22{,}000004}{2} =$ $\quad\quad$ $\frac{2{,}0827855}{2} =$

$x_{21} = 11{,}000002$ $\quad\wedge\quad x_{21} = 1{,}0413928$

mithin 21) $\sqrt{11{,}000002} = 1{,}0413928.$

22) $a_{22} = 11{,}000002$ $\quad\wedge\quad a_{22} = 1{,}0413928$

$b_{22} = 10{,}999990$ $\quad\wedge\quad b_{22} = 1{,}0413923$

$27{,}999992$ $\quad\quad$ $2{,}0827851$

$\frac{27{,}999992}{2} =$ $\quad\wedge\quad$ $\frac{2{,}0827851}{2} =$

$x_{22} = 10{,}999996$ $\quad\wedge\quad x_{22} = 1{,}0413925$

mithin 22) $\sqrt{10{,}999996} = 1{,}0413925.$

23) $a_{23} = 11{,}000002$ $\quad\wedge\quad a_{23} = 1{,}0413928$
$b_{23} = 10{,}999996$ $\quad\wedge\quad b_{23} = 1{,}0413925$

$21{,}999998 = 2{,}0827853 =$

$\frac{21{,}999998}{2} = \quad\wedge\quad \frac{2{,}0827853}{2} =$

$x_{23} = 10{,}999999 \quad\wedge\quad x_{23} = 1{,}0413926$

mithin 23) $\wedge\ \underline{10{,}999999} = 1{,}0413926.$

24) $a_{24} = 11{,}000002$ $\quad\wedge\quad a_{24} = 1{,}0413928$
$b_{24} = 10{,}999999$ $\quad\wedge\quad b_{24} = 1{,}0413926$

$22{,}000001 = 2{,}0827854 =$

$\frac{22{,}000001}{2} = \quad\wedge\quad \frac{2{,}0827854}{2} =$

$x_{24} = 11{,}000000 \quad\wedge\quad x_{24} = 1{,}0413927$

mithin 24) $\wedge\ \underline{11} = 1{,}0413927.$

Nachdem so, man sieht aus dieser Probe, mit welcher unendlichen Mühseligkeit, die Logarithmen der Primzahlen hergestellt sind, werden

1) die Logarithmen der Produkte oder Potenzen dieser Zahlen auf die bekannte Weise aus den Logarithmen der Faktoren oder Dignande erhalten;
2) andere Zahlen sind Quotienten aus solchen Zahlen, deren Logarithmen bereits bekannt, z. B. $\frac{11}{4} = 2{,}75$ oder $\frac{7}{8} = 0{,}875$ u. s. w., so daß man die Logarithmen von 275 oder 875 aus den bekannten Logarithmen von 11, 4, 7 ꝛc. herstellen kann.
3) Für sehr viele Zahlen von mehr Zifferstellen werden, wie wir schon in unserm Beispiele gesehen haben, die Logarithmen bei der Berechnung der Logarithmen der Primzahlen nebenbei gefunden; jedenfalls erleichtern diese so aufgefundenen Logarithmen, deren sich bald eine große Anzahl anhäufen muß, die Berechnung anderer Logarithmen.
4) Für manche Zahlen von viel Zifferstellen können solche gemeine Brüche, die sich in unendliche Dezimalbrüche verwandeln lassen, das Mittel abgeben zur Bestimmung der Logarithmen, z. B. $\frac{3}{11} = 0{,}272727\ldots$ u. dgl.

5) Besonders die abgekürzte Multiplikation und Division, oder die Potenzirung und Radizirung mit solchen vielziffrigen Zahlen, deren Logarithmen man bereits kennt, mag auf wieder andere Zahlen und deren Logarithmen führen ꝛc.

6) Endlich lassen sich noch viele Combinationen erdenken, vermittelst deren aus den bekannten Logarithmen bekannter Zahlen die unbekannten Logarithmen unbekannter Zahlen zu ermitteln sind, wie außer der bereits angewendeten:

„$x = \sqrt{ab}$ und $\lambda x = \frac{\lambda a + \lambda b}{2}$," auch solche, wie:

„$x = \sqrt[3]{a^2}$ und $\lambda x = \frac{2}{3}\lambda a$," oder

„$x = \sqrt[2]{\frac{a}{b}}$ und $\lambda x = \frac{\lambda a - \lambda b}{2}$" u. dgl.

Erst nachdem die Logarithmen bereits auf dem hier gezeichneten mühseligen Wege längst hergestellt waren, hat die höhere Mathematik ein viel einfacheres Mittel aufgeschlossen, die Logarithmen, nemlich durch Summation konvergenter Reihen, zu entwickeln.

Zweites Buch.

Gleichungen.

Einleitung.

§. 74.

Mit den im ersten Buche entwickelten sind alle möglichen Zahlen-Verbindungen erschöpft: ein Uebergang der Art, wie diejenigen waren, welche uns bisher zu weitern Rechnungsarten geführt, ist von hier ab nicht mehr möglich. Summen aus mehrern Summanden, Produkte aus mehrern Faktoren ließen die Möglichkeit zu, Summen aus gleichen Summanden und Produkte aus gleichen Faktoren zu setzen und damit auf die neuen Rechnungsarten des Multiplizirens und des Potenzirens zu kommen: eine Potenz hingegen besteht unabänderlich nur aus zwei Theilen, dem Dignande und dem Exponenten, und über die drei Größen, Potenz, Dignand und Exponent, die wir unter sich bereits in alle möglichen Verbindungen gebracht haben, kommen wir nicht weiter hinaus. Diese Unmöglichkeit einer Erweiterung der Rechnungsarten noch über die sieben von uns bereits entwickelten findet ihre Bestätigung auch darin, daß uns schon das Logarithmiren im Grunde nur wieder auf die vorigen Rechnungsarten zurückgeführt hat.

Die Verbindung der Zahlen bietet demgemäß, wenigstens in der elementaren Weise wie bisher, keine weitere Aufgabe mehr; ein ganz Anderes aber ist es mit der Zahlen-Vergleichung. Diese haben wir, obgleich wir sie wie jene als Grundaufgabe der Algebra hingestellt (s. erstes Buch, Einleitung) bisher nur so weit

verfolgt, daß wir Resultate derselben Art, z. B. Summen mit Summen, Quotienten mit Quotienten ꝛc. verglichen haben, und das noch mit der Beschränkung, daß die verglichenen Resultate wenigstens je einen ihrer Bestandtheile, z. B. je einen Summanden ꝛc., gleich haben mußten. Es bleiben uns also noch weiter zu vergleichen:

a) Resultate derselben Rechnungsarten, aber aus gänzlich ungleichen Theilen bestehend, z. B. $a + b = c + d$, oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$;

b) Resultate verschiedener Art, z. B. $a + b = c \times d$, oder $a(b - c) = \sqrt[x]{d}$ u. dgl.

Die Gleichungen, welche sich hieraus ergeben, unterscheiden sich von denen, welche wir bei der Entwicklung der Rechnungsarten unter dem Namen der Gesetze aufgestellt oder in unsern Aufgaben durchgeführt haben, wesentlich dadurch, daß bei den letztern durch Ausführung dieser oder jener Rechnungs-Operationen sich eine Seite immer auf denselben Ausdruck wie die andere bringen läßt, während dieß bei den aus a) und b) folgenden Gleichungen auf keine Weise möglich ist. Demgemäß werden diese grundverschiedenen Gleichungen auch durch ihre Namen unterschieden, und zwar nennt man die bisherigen (Entwicklungs-) Gleichungen analytische, die Gleichungen aber, welche unsere jetzige Aufgabe begreift, algebraische. Unter diesen algebraischen Gleichungen selbst aber unterscheidet man diejenigen, welche nach a) zwischen Resultaten derselben Art bestehen, wie schon öfter erwähnt, noch besonders als Proportionen.

Erster Abschnitt.

Proportionen.

§. 75.

Der Proportionen gibt es, wie der Rechnungsarten, sieben, als:

1) $a + b = c + d$,
2) $a - b = c - d$,
3) $ab = cd$,
4) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,
5) $a^b = c^d$,
6) $\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}$,
7) $\log_b a = \log_d c$.

Während wir nun früher (s. §§. 6, 21, 44, 65) aus dem bekannten Verhältnisse der einzelnen Zahlen auf das unbekannte ihrer Resultate geschlossen haben, so ist hier die Aufgabe umgekehrt die, aus dem bekannten Verhältnisse, welches die Resultate gegen einander haben (d. i. aus ihrer Gleichheit) auf das Verhältniß der einzelnen Zahlen zu schließen. Dort hatten wir zwei Gleichungen, um daraus eine abzuleiten, hier aber ist nur eine, nemlich die Gleichung zwischen den beiden Resultaten gegeben, und wir müssen also, um überhaupt einen Schluß machen zu können, noch eine zweite Gleichung bedingungsweise beifügen, nemlich eine, welche das Verhältniß zwischen einem Paare der betreffenden Zahlen ausspricht. Dieß führt sich denn in folgender Weise durch:

1) Es ist α) $a + b = c + d$, β) $a + b = c + d$;

es sei $a \overset{(-)}{>} c$,	$a \overset{(-)}{<} c$,
so ist $b \overset{(-)}{<} d$,	$b \overset{(-)}{>} d$, [§. 6. 2)]

d. h. wenn zwei Summen einander gleich sind, und ein Summand der ersten Summe größer oder kleiner ist als einer der zweiten, so ist umgekehrt der andere Summand der ersten Summe kleiner oder größer als der andere Summand der zweiten.

Führt man hier die Vorstellung ein, daß dieselbe bestimmte Summe ($a + b = c + d$) aus veränderlichen Summanden (indem a in c, hingegen b in d übergeht) herzustellen sei, so sagen uns dieselben Sätze:

„Für eine bestimmte Summe ist mit der Zu- oder Abnahme des einen Summanden (um eine gewisse Menge von Einheiten) umgekehrt die Ab- oder Zunahme des andern (um dieselbe Menge von Einheiten) bedingt."

Es findet also zwischen den Summanden einer und derselben Summe ein verkehrtes (ungerades) Verhältniß statt.

2) Es ist α) $a - b = c - d$, β) $a - b = c - d$,

es sei $a \overset{(-)\,(+)}{>} c$,	$a \overset{(-)\,(+)}{<} c$,
so ist $b \overset{(-)\,(+)}{>} d$,	$b \overset{(-)\,(+)}{<} d$ [§. 6. 2)].

Ebenso in:

es ist α) $a - b \doteq c - d$, β) $a - b = c - d$,

es sei $b > d$,	$b < d$,
so ist $a > c$,	$a < c$, [§. 6. 2)]

d. h. wenn von zwei gleichen Differenzen ein Theil der ersten größer oder kleiner als der gleichnamige (Minuend oder Subtrahend) der zweiten Differenz, so ist der andere Theil der ersten Differenz ebenfalls größer oder kleiner als der ihm gleichnamige der zweiten.

Stellt man sich die Sache wieder wie in 1) in der Art vor, daß dieselbe bestimmte Differenz ($a - b = c - d$) aus veränderlichen Theilen (indem a in c und b in d übergeht) gebildet werde, so sagen uns dieselben Sätze:

„Für eine bestimmte Differenz ist mit der Zu- oder Abnahme des einen Theiles (um eine gewisse Menge

von Einheiten) ebenfalls die Zu- oder Abnahme des andern (um die gleiche Menge von Einheiten) bedingt."

Es besteht also zwischen den Theilen einer und derselben Differenz kein verkehrtes, sondern ein gerades Verhältniß.

3) Es ist α) $a \times b = c \times d$, β) $a \times b = c \times d$,

es sei $a \overset{(:)}{>} c$, $a \overset{(:)}{<} c$,

so ist $b < d$, $b > d$, [§. 21. 2)],

d. h. wenn von zwei gleichen Produkten ein Faktor des ersten Produktes größer oder kleiner ist als ein Faktor des zweiten, so ist umgekehrt der andere Faktor des ersten kleiner oder größer als der andere Faktor des zweiten Produktes.

Hier entsteht die Frage, in welchem Verhältnisse dieses „größer oder kleiner" beiderseits zu verstehen sei, eine Frage, welche eigentlich auch bei 1) und 2) keineswegs müssig ist, aber sich dort, wo die Zahlen in ihrer primitiven Bedeutung als bloße Mengen von Einheiten zu nehmen sind, von selbst dahin beantwortet, daß auch das „größer oder kleiner" rein in seiner ursprünglichen Bedeutung von „mehr oder weniger Einheiten enthaltend" verstanden werden müsse. Hier und auch bei dem folgenden 4) ist es aber durch „irgendvielmal größer oder kleiner" näher zu bezeichnen, wie nemlich aus Folgendem erhellt:

Es sei, während $a \times b = c \times d$, etwa $a = nc$, d. h. a sei n mal größer als c, so muß offenbar $b = \frac{d}{n}$ oder b muß n mal kleiner als d sein, denn nur dann ist wirklich $a \times b = nc \times \frac{d}{n} = c \times d$, wie es die Voraussetzung fordert.

Oder es sei $a = \frac{c}{n}$, d. h. a sei n mal kleiner als c, so muß $b = nd$, d. h. es muß n mal größer als d sein, weil nur so wieder $a \times b = \frac{c}{n} \times nd = c \times d$ wird.

Obiger Satz genauer ausgedrückt heißt also:

„Wenn bei zwei gleichen Produkten ein Faktor des ersten irgendvielmal größer oder kleiner als einer des zweiten, so ist umgekehrt der andere Faktor des ersten ebensovielmal kleiner oder größer als der zweite Faktor des zweiten Produktes."

Denkt man sich die Sache hier wieder so, als werde das eine bestimmte Produkt ($a \times b = c \times d$) aus veränderlichen Faktoren (wobei a in c und b in d übergeht) gebildet, so sagen die Sätze α) und β):

„Für ein bestimmtes Produkt ist mit der Zu- oder Abnahme des einen Faktors um ein irgend Vielfaches umgekehrt die Ab- oder Zunahme des andern Faktors um das gleich Vielfache bedingt."

Es besteht also zwischen den Faktoren eines und desselben Produktes ein verkehrtes, wohl zu merken, vielfaches (multiplikatives) Verhältniß.

4) Es ist $\alpha)$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\beta)$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

$\underset{(:)}{}$ $\underset{(:)}{}$ $\underset{(:)}{}$ $\underset{(:)}{}$

es sei $a > c$ $a < c$,

so ist $b > d$, $b < d$ [§. 21. 2)].

Ebenso in:

es ist $\alpha)$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\beta)$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$,

und es sei $\underset{(\times)}{b} > \underset{(\times)}{d}$, $\underset{(\times)}{b} < \underset{(\times)}{d}$,

so ist $a > c$ $a < c$ [§. 21. 2)].

Beide Ansätze sagen:

„Wenn bei zwei gleichen Quotienten ein Theil des ersten größer oder kleiner als der gleichnamige (Dividend oder Divisor) des zweiten, so ist auch der andere Theil des ersten Quotienten größer oder kleiner als der mit ihm gleichnamige des zweiten."

Es ist bereits gesagt, daß auch hier das „größer oder kleiner" noch durch den Zusatz „um ein irgend Vielfaches" und „um das gleich Vielfache" genauer zu bezeichnen sei, und das Folgende liefert hiefür den Beweis.

Es sei nemlich $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und a ein nfaches von c, also $a = nc$, so muß auch b ein nfaches von d, also $b = nd$ sein, indem nur in diesem Falle wirklich $\frac{a}{b} = \frac{nc}{nd} = \frac{c}{d}$ ist.

Ebenso wenn a umgekehrt n mal kleiner als c, also $a = \frac{c}{n}$, so muß b ebenfalls n mal kleiner als d oder $b = \frac{d}{n}$ sein, weil nur dann wieder $\frac{a}{b} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n} = \frac{c}{d}$ ist.

Mit der Vorstellung eines bestimmten, sich gleich bleibenden Quotienten $\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right)$ bei veränderlichen Bestandtheilen (a geht in c, b in d über) ist der Ausdruck obiger Sätze folgender:

„Für einen bestimmten Quotienten besteht zwischen dessen Bestandtheilen das Verhältniß, daß mit der Zu- oder Abnahme des einen um ein irgend Vielfaches ebenfalls die Zu- oder Abnahme des andern um das gleich Vielfache bedingt ist."

Es besteht also zwischen den Theilen eines und desselben Quotienten nicht ein verkehrtes, sondern ein gerades, und zwar vielfaches Verhältniß.

5)*) In $a^b = c^d$ wird gemäß §. 44. 2),
wenn α) $a > c$, umgekehrt $b < d$,
β) $a < c$, „ $b > d$,
aber das bestimmte Verhältniß, in welchem das der Fall, ist kein so einfaches mehr wie bisher, sondern läßt sich nur logarithmisch ermitteln, indem man nemlich der gegebenen Gleichung die logarithmisirte $b \swarrow a = d \swarrow c$ subsituirt. Da diese Gleichung der Proportion 3) entspricht, d. h. zwischen zwei Produkten besteht, so ist das gesuchte Verhältniß nach 3) dahin bestimmt, daß

„für eine bestimmte, sich gleich bleibende Potenz zwischen dem Exponenten und dem Logarithmus des Dignands ein verkehrtes, vielfaches Verhältniß besteht."

6) In $\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}$ wird [§. 44. 2)],
wenn α) $a > c$, auch $b > d$,
und β) $a < c$, auch $b < d$,
so daß zwischen Radikand und Radikator einer und derselben

*) Für die Proportionen 5), 6) und 7) wird die Entwicklung, welche übrigens der der vorausgehenden Proportionen ganz analog ist, aus leicht ersichtlichen Gründen hier bedeutend abgekürzt gegeben.

Wurzel im Allgemeinen ein gerades Verhältniß sich herausstellt; bestimmt erkennbar ist es wieder nur aus der logarithmisirten Gleichung, in welcher $\frac{\Lambda a}{b} = \frac{\Lambda c}{d}$.

Da wir nun hier eine Proportion der vierten Art vor uns haben, so statuirt sich für eine bestimmte, sich gleich bleibende Wurzel zwischen Radikator und Logarithmus des Radikands ein gerades vielfaches Verhältniß.

7) Eben ein solches geht auch aus $\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c}$ hervor; wird nemlich sowohl $\sqrt[b]{a}$ als die gleiche Größe $\sqrt[d]{c}$ mit x bezeichnet, so ist gemäß §. 64. II.:

$$b^x = a \text{ und } d^x = c,$$

woraus $x \Lambda b = \Lambda a$ und $x \Lambda d = \Lambda c$,

mithin $x = \frac{\Lambda a}{\Lambda b} = \frac{\Lambda c}{\Lambda d}$, also auch

$$\frac{\Lambda a}{\Lambda b} = \frac{\Lambda c}{\Lambda d},$$ so daß

für einen bestimmten sich gleich bleibenden Logarithmus zwischen dem Logarithmus der Basis und dem der Zahl ein gerades vielfaches Verhältniß besteht.

§. 76.

Nachdem wir im Vorhergehenden die Materie unserer sieben Proportionen kennen gelernt, indem wir untersuchten, was eine jede als ihren Inhalt aussage, müssen wir sie nun nach ihrer Form näher in's Auge fassen, ob sie denn auch nach dieser von einander grundverschieden sind, oder ob sie vielleicht auf wenige Hauptformen sich zurückführen lassen. Hierauf leitet uns schon die Beobachtung, die wir im vorhergehenden §. an unsern drei letzten Proportionen gemacht haben: von diesen ist uns nemlich, indem wir sie logarithmisch behandelten, die eine in die Form der dritten, die beiden andern in die der vierten Proportion übergegangen, so daß wir wohl berechtigt sind, diese letzten drei Arten von Proportionen, die uns ja in ihren ursprünglichen Formen auch nach ihrem Inhalte nicht bestimmt zu deuten waren, nur unter ihren neuen logarithmischen Formen zu behalten, und sie somit als eigene Arten von Proportionen von nun an nicht mehr weiter aufzuführen.

Von den vier uns noch übrigen Proportionen wird, wie wir sogleich sehen werden, die erste durch ein einfaches Verfahren auf die Form der zweiten, die dritte auf die der vierten Proportion gebracht, wonach uns denn nur mehr zwei Hauptformen, der zweiten und der vierten, als nothwendige festzuhalten sind.

Es ist nemlich in 1)

$$a + b = c + d,$$

mithin auch $(a + b) - (b + d) = (c + d) - (b + d)$,

oder $a - d = c - b$,

womit denn die Gleichung zwischen zwei Summen in eine zwischen zwei Differenzen verwandelt ist.

Ebenso ist in 3)

$$ab = cd,$$

daher auch $\frac{ab}{bd} = \frac{cd}{bd}$,

oder $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$,

und so auch die Gleichung zwischen zwei Produkten in eine Gleichung zwischen zwei Quotienten übergegangen.

Die zwei als Hauptformen beizubehaltenden Proportionen sind also:

1) die Gleichung zwischen zwei Differenzen oder die arithmetische Proportion,
2) die Gleichung zwischen zwei Quotienten oder die geometrische Proportion.

Die Gesetze dieser beiden nun weitläufiger zu entwickeln, ist unsere nächste Aufgabe.

Arithmetische Proportion.

§. 77.

Eine arithmetische Proportion ist eine Gleichung zwischen zwei Differenzen; ihr Ausdruck ist:

$$a - b = c - d,$$

was man liest: „a verhält sich zu b, wie c zu d."

In diesem Ausdrucke belegt man, weil man die Rechnung mit den Proportionen als eine spezifische zu behandeln gewohnt ist, die einzelnen darin vorkommenden Theile mit besondern Namen, nemlich:

1) Jede Differenz für sich heißt ein arithmetisches Verhältniß, und zwar (a—b) das erste, (c—d) das zweite;

2) die einzelnen Zahlen a, b, c, d heißen Glieder der Proportion, wobei man noch weiter unterscheidet:

α) Glieder eines und desselben Verhältnisses, wie a und b;

β) homologe Glieder — so bezeichnet man der gleichen Beziehung (Bedeutung) wegen, welche sie haben, sowohl die beiden Minuende a und c unter sich, als auch die beiden Subtrahende b und d —;

γ) Vorder- und Hinterglieder (der beiden Verhältnisse) — als Erstere die Minuende, als Letztere die Subtrahende bezeichnet —;

δ) äußere Glieder (a und d), innere (b und c) der Proportion — eine Bezeichnung, die sich selbst erklärt.

Nachdem wir nun unsere Gleichung sowohl im Ganzen als in den einzelnen Theilen zu benennen wissen, ist die weitere Aufgabe, daraus die möglichen formellen Folgerungen*) zu ziehen; diese sind:

a) Die Gleichheit der beiden Differenzen (Verhältnisse), die in „a — b = c — d" ausgesprochen ist, setzt voraus, daß, wenn das erste Verhältniß positiv, auch das zweite positiv, und wenn das erste negativ, dieß auch das zweite Verhältniß sei: im erstern Falle sind offenbar die Vorderglieder größer als die Hinterglieder, im letztern umgekehrt. Da man nun ein Verhältniß, in welchem das Vorderglied größer als das Hinterglied, ein fallendes, ein solches aber, in welchem das Gegentheil Statt findet, ein steigendes nennt, so kann obige Folgerung auch so ausgesprochen werden:

„In einer arithmetischen Proportion müssen entweder beide Verhältnisse fallend oder beide steigend sein."

b) Werden die beiden Hinterglieder zu beiden Verhältnissen addirt, wodurch natürlich die Gleichheit nicht gestört wird, so erhält man:

$$(a - b) + (b + d) = (c - d) + (b + d),$$

oder $$a + d = c + b.$$

Liest man nun 1) diese Gleichung mit den Bezeichnungen der gegebenen Proportion, so heißt sie:

---

*) die den Inhalt betreffenden enthält bereits §. 75. 2).

„Die Summe der äußern Glieder einer arithmetischen Proportion ist gleich der Summe der innern“;

liest man aber 2) die gegebene Proportion mit Beziehung auf diese Summen-Gleichung, so hat man:

„Eine Gleichung zwischen zwei Summen wird in eine arithmetische Proportion verwandelt, indem man die Summanden der einen Summe zu den äußern, die der andern zu den innern Gliedern derselben macht.“

§. 78.

Der letzte Satz läßt offenbar einen gewissen Spielraum, nemlich darin, von welcher Summe man die Summanden zu den äußern, von welcher zu den innern Gliedern machen, und welche Stellung man hiebei den einzelnen Summanden geben will: setzt man nun alle Möglichkeiten, die hierin liegen, so gehen aus derselben Gleichung „$a + d = c + b$“ acht verschieden geformte arithmetische Proportionen hervor, nemlich:

$$\text{I.}\begin{cases} 1)\ a - b = c - d, \\ 2)\ d - b = c - a, \\ 3)\ a - c = b - d, \\ 4)\ d - c = b - a, \end{cases}$$

$$\text{II.}\begin{cases} 5)\ b - a = d - c, \\ 6)\ c - a = d - b, \\ 7)\ b - d = a - c, \\ 8)\ c - d = a - b, \end{cases}$$

welche acht Proportionen richtig abgeleitet, also wahr sind, weil sich aus allen wieder ergibt: $a + d = c + b$.

Mit der Wahrheit unserer ursprünglichen (ersten) Proportion besteht demnach auch unmittelbar die Wahrheit der folgenden sieben Proportionen; es darf also der Wahrheit unbeschadet die gegebene Proportion alle die Veränderungen in den Stellungen ihrer Glieder erfahren, welche die übrigen sieben Proportionen ausweisen.

Deuten wir nun diese letztern als bloße Veränderungen der ersten und bedienen wir uns hiebei der dafür herkömmlichen Aus-

drücke, so erhalten wir folgende Sätze über die möglichen Veränderungen in den Stellungen der Glieder einer arithmetischen Proportion:

1) Nach 2) und 3) dürfen sowohl die beiden äußern Glieder unter sich, als auch die beiden innern verwechselt (permutirt) werden;
2) nach 4) darf eine Proportion gänzlich umgestürzt (invertirt), d. h. von hinten nach vorne angeschrieben werden;
3) nach 5) darf diese Inversion mit jedem einzelnen Verhältnisse für sich geschehen, wodurch denn die Vorderglieder zu Hintergliedern werden, und umgekehrt;
4) nach 6) und 7) können die homologen Glieder zu Gliedern desselben Verhältnisses gemacht werden, und zwar entweder die Vorderglieder zum 1ten wie in 6), oder die Hinterglieder wie in 7);
5) nach 8) können die Verhältnisse selbst verwechselt (permutirt) werden, so daß das erste zum zweiten wird und umgekehrt.

§. 79.

Werden beide Seiten einer Gleichung, hier der arithmetischen Proportion, auf gleiche Art verändert, so bleibt die Gleichung (Proportion) bekanntlich wahr, d. h. die beiden Seiten sind auch nach der Veränderung noch einander gleich. Diesem Satze gemäß verändern wir nun unsere Proportion nach einander durch alle Rechnungsarten und sehen zu, ob die sich hiebei ergebenden Gleichungen wieder arithmetische Proportionen sind; ist das der Fall, so lesen wir dieselben mit Beziehung auf die gegebene Proportion und erhalten damit gewisse Sätze, welche uns sagen, ob und welche Veränderungen wir durch diese oder jene Rechnungsarten an den Gliedern einer arithmetischen Proportion selbst vornehmen dürfen, ohne daß diese aufhörte, wahr zu sein.

1) Ist $a - b = c - d$,
so auch $(a - b) + m = (c - d) + m$;
hieraus aber erhält man
entweder $\alpha)$ $(a + m) - b = (c + m) - d$,
oder $\beta)$ $a - (b - m) = c - (d - m)$,
also in beiden Fällen wieder eine arithmetische Proportion.

Permutiren wir sowohl in der gegebenen als in den beiden abgeleiteten Proportionen die innern Glieder, so haben wir folgende weitere Proportionen:

$$a - c = b - d,$$

und dann entweder α) $(a + m) - (c + m) = b - d$,

oder β) $a - c = (b - m) - (d - m)$.

Alle diese vier abgeleiteten Proportionen können wir, wenn wir genauer zusehen, mit Beziehung auf die beiden gegebenen in Einem Satze lesen. Welche Veränderungen nemlich (durch Addition oder Subtraktion) vorgenommen sind, immer ist es ja ein äußeres und ein inneres Glied, welche so und zwar auf gleiche Art sich verändert finden. Da nun aber hiebei, wie sich in den vier abgeleiteten Sätzen zeigt, immer wieder arithmetische Proportionen entstehen, so haben wir den Satz:

„Eine arithmetische Proportion bleibt wahr, wenn man je ein äußeres und ein inneres Glied um dieselbe Zahl vermehrt oder vermindert."

Z. B. $37 - 21 = 28 - 12$ $(= 16)$,

$(37 + 4) - 21 = (28 + 4) - 12$ $(= 20)$,

$37 - (21 - 5) = 28 - (12 - 5)$ $(= 21)$,

$(37 - 11) - (21 - 11) = (28 + 3) - (12 + 3)$ $(= 16)$.

2) Ist $a - b = c - d$,

so ist sowohl α) $(a - b) \times m = (c - d) \times m$,

woraus $am - bm = cm - dm$,

als auch β) $(a - b) : m = (c - d) : m$,

woraus $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{c}{m} - \frac{d}{m}$.

In beiden Fällen erhalten wir wieder arithmetische Proportionen, aber die Veränderungen durch Multiplikation oder Division müssen, wie wir sehen, alle Glieder erfahren, wenn wieder Proportionen entstehen sollen. Wir haben also den Satz:

„Eine arithmetische Proportion bleibt wahr, wenn alle Glieder derselben mit der gleichen Zahl multiplizirt oder durch die gleiche Zahl dividirt werden."

Z. B. 1) $5 - 8 = 11 - 14$ $(= -3)$,

× 3) $15 - 24 = 33 - 42$ $(= -9)$;

2) $16 - 8 = 28 - 20$ $(= 8)$,

: 4) $4 - 2 = 7 - 5$ $(= 2)$.

3) Ist $a - b = c - d$,

so auch α) $(a - b)^m = (c - d)^m$,

und β) $\sqrt[m]{a - b} = \sqrt[m]{c - d}$,

aber in beiden Fällen entstehen nicht wieder Differenzen auf beiden Seiten, also nicht wieder arithmetische Proportionen: durch Potenzirung oder Radizirung kann also an den Gliedern einer arithmetischen Proportion nichts geändert werden, ohne daß diese aufhörte, wahr zu sein.

4) Zu den Veränderungen der Glieder, mit welchen die Proportion dennoch besteht, gehören auch die, welche sich ergeben, wenn zwei oder mehrere Proportionen zusammengesetzt werden, nemlich in folgender Weise:

Es sei $a_1 - b_1 = c_1 - d_1$,

$a_2 - b_2 = c_2 - d_2$,

$a_3 - b_3 = c_3 - d_3$,

$a_4 - b_4 = c_4 - d_4$,

so ist auch $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + (a_4 - b_4) =$

$= (c_1 - d_1) + (c_2 - d_2) + (c_3 - d_3) + (c_4 - d_4)$,

woraus $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4) =$

$= (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) - (d_1 + d_2 + d_3 + d_4)$,

also wieder eine arithmetische Proportion. Untersucht man, wie diese sich unmittelbar aus der gegebenen ableiten (zusammensetzen) läßt, so ergibt sich die Regel:

„Wenn man mehrere gegebene arithmetische Proportionen Glied für Glied addirt, so entsteht wieder eine arithmetische Proportion."

Z. B. $3 - 10 = 18 - 25$ $(= -7)$

$23 - 17 = 8 - 2$ $(= 6)$

$38 - 11 = 60 - 33$ $(= 27)$

$7 - 29 = 15 - 37$ $(= -22)$

$71 - 67 = 101 - 97$ $(= 4)$.

§. 80.

Als eine besondere Art der arithmetischen Proportion werden gewöhnlich solche aufgeführt, deren innere Glieder einander gleich sind wie $a - b = b - c$; man heißt sie stetige Proportionen. Man findet dieselben häufig so angeschrieben, daß das gleiche (mittlere)

Glied nur einmal angesetzt und dabei das Gleichheits-Zeichen hinweggelassen wird, wie in $a - b - c$.*)

Weil in der stetigen arithmetischen Proportion gemäß §. 77. a), wenn b um irgend eine Zahl größer oder kleiner als a, ebenso c um dieselbe Zahl größer oder kleiner als b, mithin b arithmetisch genommen gerade in der Mitte zwischen a und c liegt, so nennt man b das arithmetische Mittel zwischen a und c.

Wenn nun $a - b = b - c$,

so ist $b + b = 2b = a + c$,

$$\text{und } b = \frac{a + c}{2},$$

d. h. man findet das arithmetische Mittel zwischen zwei Zahlen, wenn man die Summe derselben durch die Zahl 2 dividirt.

Aber auch zwischen mehrern Zahlen läßt sich ein arithmetisches Mittel, d. h. eine Zahl finden, welche von den größern unter ihnen zusammen um ebensoviel differirt, als hinwieder die kleinern zusammen von ihr differiren, und zwar auf folgende Art:

Es sei das arithmetische Mittel zu suchen aus den Zahlen

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6.

Zu diesem Behufe suchen wir die arithmetischen Mittel zwischen je zwei dieser Zahlen, was durch die folgenden Proportionen geschieht:

$$a_1 - x_1 = x_1 - a_2,$$
$$a_3 - x_2 = x_2 - a_4,$$
$$a_5 - x_3 = x_3 - a_6.$$

Addiren wir nun nach §. 79. 4) diese Proportionen Glied für Glied, so erhalten wir die neue Proportion:

$$(a_1 + a_3 + a_5) - (x_1 + x_2 + x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) - (a_2 + a_4 + a_6).$$

Nun will man aber nicht mehrere arithmetische Mittel zwischen den einzelnen Zahlen-Paaren, sondern Ein arithmetisches Mittel aus allen gegebenen Zahlen; mithin dürfen die Zahlen x_1, x_2, x_3 nicht verschiedene, sondern sie müssen eine und dieselbe Zahl x sein.

---

*) Es hat hier diese Art, die stetigen Proportionen anzuschreiben, bloß erwähnt, keineswegs empfohlen werden sollen, indem die sich dadurch ergebende Ersparniß an Zeit und Raum sicher den Nachtheil nicht aufwiegt, den solche mechanische und zudem ganz sinnwidrige Vorschriften hervorbringen müssen.

Unter dieser Voraussetzung haben wir:

$$(a_1 + a_3 + a_5) - (x + x + x) = (x + x + x) - (a_2 + a_4 + a_6),$$

woraus $6x = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$,

$$\text{und } x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6}{6}.$$

Man findet also das arithmetische Mittel aus mehrern Zahlen, indem man deren Summe durch ihre Anzahl dividirt.

Z. B. Es soll das arithmetische Mittel aus folgenden Zahlen gesucht werden: 26, 17, 48, 25, 30, 22. Nun ist nach vorstehender Regel

$$x = \frac{26 + 17 + 48 + 25 + 30 + 22}{6} = \frac{168}{6} = 28.$$

Es übertrifft aber 28 die kleineren der gegebenen Zahlen, nemlich 26, 17, 25 und 22 einzeln nacheinander um 2, 11, 3 und 6, zusammen um $2 + 11 + 3 + 6 = 22$; hingegen wird es von den größern als 48 und 30 einzeln um 20 und 2, zusammen um dieselbe Zahl 22 übertroffen: das arithmetische Mittel 28 steht also in der That zwischen den Zahlen, welche kleiner als es selbst, und denen, welche größer, genau in der Mitte.

Die Regel für die Auffindung des arithmetischen Mittels ist oben bloß für eine gerade Anzahl von Zahlen abgeleitet, aber sie gilt nicht allein auch für eine ungerade, sondern läßt sich für eine solche auch eben so gut ableiten, wie aus der folgenden Durchführung hervorgeht.

Es sei das arithmetische Mittel zwischen den 7 Zahlen: $a_1, a_2 \ldots a_7$ zu suchen. Nun ist zunächst wieder:

$$\begin{aligned} a_1 - x_1 &= x_1 - a_2, \\ a_3 - x_2 &= x_2 - a_4, \\ a_5 - x_3 &= x_3 - a_6, \\ a_7 - x_4 &= 0\ ^*), \end{aligned}$$

woraus $(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = (x_1 + x_2 + x_3) - (a_2 + a_4 + a_6)$,

welche Proportion mit der Voraussetzung Eines arithmetischen Mittels zwischen sämmtlichen gegebenen Zahlen in die übergeht:

---

*) Eigentlich hätte man hier die Proportion: $a_7 - x_4 = x_4 - a_7$, woraus $2x_4 = 2a_7$ oder $x_4 = a_7$, mithin $a_7 - x_4 = 0$, wie es oben angesetzt ist.

$$(a_1 + a_3 + a_5 + a_7) - 4x = 3x - (a_2 + a_4 + a_6);$$

diese aber gibt $7x = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$,

und $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7}{7}$, wie oben.

Anwendung der arithmetischen Proportion.

§. 81.

Wenn zwei Größen A und B (räumliche oder zeitliche) in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daß

α) mit der Zu- oder Abnahme der einen um eine bestimmte Menge von Einheiten die andere ebenfalls um dieselbe Menge von Einheiten zu- oder abnimmt, oder daß

β) mit der Zu- oder Abnahme der ersten umgekehrt die Ab- oder Zunahme der zweiten um die gleiche Menge von Einheiten bedingt ist —

so stehen gemäß dem in §. 75. sub 2) und 1) Gesagten diese Größen A und B oder genauer gesprochen, die Zahlen, durch welche sie in irgend gleichen Einheiten ausgedrückt sind,

α) im ersten Falle offenbar, in dem Verhältnisse von veränderlichen Theilen einer bestimmten, sich gleich bleibenden Differenz, oder im geraden arithmetischen Verhältnisse;

β) im zweiten Falle aber in dem von veränderlichen Summanden einer bestimmten, sich gleich bleibenden Summe, oder im verkehrten arithmetischen Verhältnisse.

Welches also auch die Zahlenwerthe seien, durch welche die Größen A und B im einzelnen Falle ausgedrückt sind, immer ist bei α) die Differenz, bei β) die Summe aus denselben die nämliche.

Sind nun die Zahlen, durch welche die Größen A und B einmal ausgedrückt sind, a_1 und b_1, ein anderes Mal a_2 und b_2 (wobei a_1 und a_2 die veränderlichen Einzelwerthe derselben Größe A, b_1 und b_2 die von B, hingegen a_1 und b_1 einerseits, a_2 und b_2 andrerseits die je zusammengehörigen Einzelwerthe beider Größen A und B sind), so müssen diese Zahlen oder wie sie eben bestimmter bezeichnet worden sind, die zusammengehörigen Einzelwerthe der beiden Größen

α) im ersten Falle als die entsprechenden Theile zweier gleichen Differenzen,

β) im zweiten als die Summanden zweier gleichen Summen angesetzt werden.

Wir erhalten also die Proportionen:

α) $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$,

β) $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$.

In der zweiten Proportion, welche man übrigens auch auf die Form der ersten oder der arithmetischen Proportion bringen kann (§. 76.) ist die Stellung der Glieder als der Summanden in einer Summe ganz gleichgültig; nicht so aber in der ersten. Wenn hier $a_1 >$ oder $< b_1$, so ist auch $a_2 >$ oder $< b_2$; es kann also nicht etwa die eine Differenz mit $a_1 - b_1$, die andere mit $b_2 - a_2$ angesetzt werden, indem sonst das eine Verhältniß steigend, das andere fallend wäre, was nach §. 77. a) nicht sein kann, sondern die Differenzen können nur in der Form wie sie oben stehen, oder auch mit $b_1 - a_1$ und $b_2 - a_2$ ausgedrückt sein, so nemlich, daß die veränderlichen Einzelwerthe je derselben Größe, hier a_1 und a_2 einerseits, b_1 und b_2 andrerseits, homologe Glieder der Proportion bilden. Das ist denn auch bei der Formation solcher Proportionen wohl zu beachten.

Was nun den Gebrauch betrifft, den man von derlei so formirten Proportionen machen kann, so besteht der darin, daß man vermittelst derselben aus einem Paare zusammengehöriger Einzelwerthe von A und B (a_1 und b_1) in Verbindung etwa mit einem zweiten Einzelwerthe (a_2) von A den entsprechenden zweiten Einzelwerth (b_2) von B berechnet. Den letztern, unbekannten Einzelwerth pflegt man hiebei mit einem der Endbuchstaben des Alphabets, mit x, y . . . , zu bezeichnen. Die folgenden Beispiele werden das hier Gesagte noch klarer machen.

Beispiele.

1) Zwei Gegenstände A und B bewegen sich von einem und demselben Orte aus mit gleicher Geschwindigkeit (nach derselben Richtung): nun sei in dem Augenblicke, in welchem A von dem fraglichen Orte 44 Schritte, B deren nur 27 entfernt; wie weit wird B von dem Orte weg sein, wenn A 100 Schritte weit entfernt ist?

Auflösung. Da die Geschwindigkeit Beider gleich groß ist, so muß ihre Entfernung von dem Orte in gleichen Zeiten immer um die gleiche Menge von Schritten zunehmen; diese Entfernungen (hier in Schritten ausgedrückt) stehen also im

Verhältnisse von veränderlichen Theilen einer sich gleich bleibenden Differenz und wir haben sonach je die zusammengehörigen als die entsprechenden Theile zweier gleichen Differenzen anzusetzen, so daß wir erhalten:

Entfernung (1)*) d. A — Entfernung (1) d. B =
= Entfernung (2) d. A — Entfernung (2) d. B,

oder die Entfernung in Zahlen (von Schritten) ausgedrückt:

$$44 - 27 = 100 - x,$$
$$\text{woraus } x + 44 = 27 + 100$$
$$(x + 44) - 44 = 127 - 44$$
$$x = 83;$$

die fragliche Entfernung (2) des B beträgt also 83 Schritte.

2) Zwei Personen A und B bewegen sich öfter von zwei bestimmten Orten aus mit gleicher Geschwindigkeit gegen einander. Ein erstes Mal haben sie sich begegnet, als A von dem Orte, von dem er ausging, 70, B von dem seinigen 30 Schritte entfernt war; ein anderes Mal begegnen sie sich, da A gerade 45 Schritte von seinem Ausgangsorte entfernt ist; wie viele Schritte sind es von dem Orte des B?

Auflösung. Je mehr Schritte A bis zur Begegnung macht, um ebensoviele weniger braucht B zu machen; die Zahlen der Schritte des A und des B stehen also im verkehrten arithmetischen Verhältnisse, und es sind sonach je die zusammengehörigen als die Summanden zweier gleichen Summen anzusetzen. Wir haben daher:

3(1) Schritte d. A + 3(1) Schr. d. B = 3(2) Sch. d. A + 3(2) Sch. d. B,
oder 70 + 30 = 45 + x,
woraus $x = 100 - 45 = 55$.

Sie begegnen sich also das zweite Mal 55 Schritte von dem Orte des B.

3) Das Jahr 50 nach Erbauung Roms fällt mit dem Jahre 704 v. Chr. zusammen; mit welchem Jahre der Stadt das Jahr 30 v. Chr.?

Auflösung. Je mehr Jahre nach Erbauung Roms verflossen

---

*) Diese Zahlen (1), (2) zeigen an, daß die mit der gleichen Zahl (1) bezeichneten die zusammengehörigen Entfernungen Beider in einem ersten Falle, die mit (2) die in einem zweiten Falle seien.

sind, um so viel weniger sind es noch Jahre v. Chr.; mithin besteht zwischen den Zahlen dieser Jahre ein verkehrtes arithmetisches Verhältniß, und sie sind somit als die Summanden zweier gleichen Summen anzusetzen. Wir haben also:

J (1) der Stadt + J (1) v. Chr. = J (2) d. Stadt + J (2) v. Chr.

$$50 + 704 = x + 30$$
$$754 - 30 = x$$
$$x = 724.$$

Also das Jahr 724 der Stadt fällt mit dem Jahre 30 v. Chr. zusammen.

4) Wenn es in Wien $2^h\,19'$ (2 Uhr 19 Minuten) ist, hat man in München gerade 2^h; wie viel Uhr ist es in München, wenn man in Wien gerade $5^h\,50'$ hat?

Auflösung. Um welchen Bogen die Sonne in Wien während einer gewissen Zeit von O. nach W. rückt, um einen ebenso großen thut sie das auch in München; hievon aber allein hängt die Zeit ab, welche die Uhren in diesen Städten zeigen sollen: mithin stehen die Zahlen dieser Zeiten in geradem arithmetischen Verhältnisse und sind demnach als die entsprechenden Theile zweier gleichen Differenzen anzusetzen. Wir haben daher:

Uhrzeit (1) in W. — Uhrz. (1) in M. = Uhrz. (2) in W. — Uhrz. (2) in M.

$$2^h\,19' - 2^h = 5^h\,50' - x^h$$
$$x^h + 2^h\,19' = 7^h\,50'$$
$$x = 5^h\,31'.$$

§. 82.

Eine weitere Anwendung, die von der arithmetischen Proportion gemacht wird, besteht in der Bestimmung des arithmetischen Mittels. Der Gebrauch desselben beruht auf Folgendem: Man will irgend eine Größe erfahrungsgemäß bestimmen; nun werden aber die Erfahrungen, aus denen diese Bestimmung geschehen soll, als Messungen, Zählungen, an verschiedenen Orten oder zu verschiedenen Zeiten, überhaupt unter verschiedenen Umständen gemacht und fallen hienach auch verschieden aus. Es ist aber offenbar diejenige Erfahrung der Wahrheit am nächsten, von welcher alle zusammen am wenigsten differiren; diese aber ist keine andere als das arithmetische Mittel aus allen, indem jede andere Messung ꝛc., welche unter diesem Mittel bleibt, von den größern, jede, welche

über das Mittel hinausgeht, von den kleinern zusammen mehr differirt als dieses Mittel selbst. Aus diesem Grunde wird denn auch in allen solchen Fällen das arithmetische Mittel als die wahre zu bestimmende Größe angesehen, und findet daher die Bestimmung desselben häufige Anwendung.

Z. B. Im Laufe der ersten 14 Tage des Januar 1852 wurden in Amberg Mittags 12^h die unten folgenden Thermometerstände beobachtet: welches ist nach diesen der mittlere Stand des Thermometers während dieses Zeitraums gewesen?

Die Beobachtungen ergaben:

am	1ten	$-4°,6$,
„	2 „	$-3,3$,
„	3 „	$-2,0$,
„	4 „	$-0,8$,
„	5 „	$+1,6$,
„	6 „	$-3,0$,
„	7 „	$-3,0$;
„	8 „	$-0,2$,
„	9 „	$-1,5$,
„	10 „	$+0,6$,
„	11 „	$-1,0$,
„	12 „	$+4,4$,
„	13 „	$+8,5$,
„	14 „	$+4,2$;

mithin ist $x = \frac{-19°,4+19°,3}{14} = \frac{-0°,1}{14} = -0°,007.$

Oder: Auf der Schranne in N. N. wurden an Roggen verkauft:

8	Schäffel	zu	19	fl.	20	kr. das Schäffel,
17	„	„	17	„	30	„ „ „
32	„	„	20	„	48	„ „ „
21	„	„	18	„	30	„ „ „
21	„	„	20	„	—	„ „ „

welches ist der wahre Mittelpreis?

Auflösung. Dieser ist nach dem im Anfange dieses §. Gesagten kein anderer als das arithmetische Mittel aus allen einzelnen Preisen. Dabei muß aber hier bemerkt werden, daß z. B. 19 fl 20 kr. nicht bloß einmal als einzelner Preis in

der Summe für das arithmetische Mittel zu stehen hat, sondern achtmal, d. h. so oft er als einzelner Preis eines Schäffels vorkommt, und so auch bei den übrigen. Die Berechnung macht sich daher auf folgende Weise:

Die einzelnen Summanden (hier werden sie unter einander geschrieben) sind:

8	×	19 fl.	20 kr.	=	154 fl.	40 kr.
17	×	17 „	30 „	=	297 „	30 „
32	×	20 „	48 „	=	665 „	36 „
21	×	18 „	30 „	=	388 „	30 „
21	×	20 „	— „	=	420 „	— „
99					1926 „	16 „

mithin ist die Summe aus allen einzelnen Preisen 1926 fl. 16 kr., die Anzahl derselben 99, also $x = \frac{1926 \text{ fl. } 16 \text{ kr.}}{99} =$ = 19 fl. 27 kr. und nicht ganz 2 bl.

Geometrische Proportion.

§. 83.

Eine geometrische Proportion ist jede Gleichung zwischen zwei Quotienten. Der Ausdruck derselben ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

oder, weil man hier gewöhnlich das andere Divisionszeichen anwendet,

$$a : b = c : d,$$

was wie bei der arithmetischen Proportion gelesen wird.

Auch hier werden für die einzelnen Theile der Proportion spezifische Benennungen gebraucht und zwar heißen wie bei der arithmetischen Proportion

1) a : b und c : d die beiden Verhältnisse, das erste und das zweite;
2) die einzelnen Zahlen die Glieder der Proportion, wobei wieder
   α) a und b einerseits, c und d andrerseits als Glieder je desselben Verhältnisses,
   β) a und c einerseits, b und d andrerseits als homologe Glieder,
   γ) a und c als Vorder-, b und d als Hinterglieder (ihrer Verhältnisse),
   δ) a und d endlich als äußere, b und c als innere Glieder der Proportion unterschieden werden.

Wenn wir nun die Proportion weiter in formeller Beziehung untersuchen, so sagt sie uns:

a) Wenn $a > b$, d. h. der Quotient $\frac{a}{b}$ ein unächter Bruch ist, muß auch $\frac{c}{d}$ ein solcher, also $c > d$ sein, umgekehrt wenn $\frac{a}{b}$ ein ächter Bruch, muß es auch $\frac{c}{d}$, demnach mit $a < b$ auch $c < d$ sein. Weil nun im ersten Falle die Vorderglieder größer als ihre Hinterglieder, so nennt man die Verhältnisse selbst fallende, im zweiten hingegen, wo die Vorderglieder kleiner als die Hinterglieder, steigende; die obige Regel aber, daß beide Quotienten zugleich ächte oder beide unächte Brüche sein müssen, verwandelt sich, wenn man die eben eingeführten Benennungen gebraucht, in die:

„In einer geometrischen Proportion müssen entweder beide Verhältnisse steigend oder beide fallend sein."

b) Multiplizirt man beide Verhältnisse mit dem Produkte aus den beiderseitigen Hintergliedern, so bleibt die Gleichung offenbar wahr; wir haben aber sodann:

$$\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd,$$

oder $ad = cb$.

Liest man diese Gleichung mit Beziehung auf die gegebene Proportion, so sagt sie:

„In der geometrischen Proportion ist das Produkt aus den beiden äußern Gliedern gleich dem Produkte aus den beiden innern."

Liest man aber umgekehrt die gegebene Proportion mit Beziehung auf diese Produkten-Gleichung, so ergibt sich:

„Jede Gleichung zwischen zwei Produkten (aus je zwei Faktoren) läßt sich in eine geometrische Proportion verwandeln, wenn man die Faktoren des einen Produktes zu deren äußern, die des andern zu den innern Gliedern macht."

Die Unbestimmtheit, welche dieser Satz hinsichtlich der Stellungen der einzelnen Faktoren in der Proportion zuläßt, macht wieder (s. §. 78) acht durch die Stellungen ihrer Glieder verschiedene Proportionen möglich, nemlich:

$$\begin{cases} 1)\ a : b = c : d, \\ 2)\ d : b = c : a, \\ 3)\ a : c = b : d, \\ 4)\ d : c = b : a, \end{cases} \qquad \begin{cases} 5)\ b : a = d : c, \\ 6)\ c : a = d : b, \\ 7)\ b : d = a : c, \\ 8)\ c : d = a : b. \end{cases}$$

Lesen wir wieder die 7 folgenden Proportionen mit Beziehung auf die erste, so ergeben sich dieselben Regeln, welche wir über die möglichen Veränderungen in den Stellungen der Glieder bei der arithmetischen Proportion entwickelt haben. Wir verweisen daher bezüglich dieser Regeln auf §. 78, und nur das bemerken wir noch, daß die Kenntniß dieser möglichen Veränderungen für die Anwendung der geometrischen Proportion von ungleich größerer Wichtigkeit ist, als bei der arithmetischen, wovon wir uns später wohl überzeugen werden.

§. 84.

Veränderungen an den Gliedern selbst.

Werden beide Seiten der Gleichung (Proportion) nach den verschiedenen Rechnungsarten je auf gleiche Art verändert, so ergeben sich offenbar neue, d. h. anders geformte Gleichungen. Lassen sich aber diese abermals auf Gleichungen zwischen zwei Quotienten d. i. auf Proportionen bringen, so erhält man, wenn man diese neuen Proportionen mit Beziehung auf die gegebene liest, gewisse Regeln, nach welchen die Glieder einer Proportion verändert werden können, ohne daß die Proportion aufhörte, wahr zu sein.

Nun sei die ursprüngliche Proportion, wie bisher,

$$a : b = c : d,$$

so ist 1) $\frac{a}{b}$ *) $\pm m = \frac{c}{d} \pm m$,

$$\frac{a \pm bm}{b} = \frac{c \pm dm}{d},$$

$$(a \pm bm) : b = (c \pm dm) : d,$$

welche Proportion sich jedoch nicht wohl einfach als eine Aenderung

---

*) Sobald wir die Proportion nicht als solche, sondern als bloße Gleichung betrachten und behandeln, verwandeln wir immer das eine Divisionszeichen (:)

der gegebenen darstellen läßt, außer wenn wir $m = 1$ setzen, wo wir dann erhalten:

$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d,$$

oder $(a \pm b) : (c \pm d) = b : d$ (permutando).

Lesen wir diese neue Proportion

α) nach der ursprünglichen Proportion $a : b = c : d$,

oder aber β) nach derselben aber permutirten, d. i. nach $a : c = b : d$,

so hat man:

α) Die Summe oder Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses verhält sich zur Summe oder Differenz der Glieder des zweiten, wie ein Paar homologe Glieder (d. i. wie ein Glied des ersten Verhältnisses zu seinem homologen im zweiten);

β) die Summe oder Differenz der Vorderglieder verhält sich zur Summe oder Differenz der Hinterglieder, wie ein Paar Verhältnißglieder (d. i. wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede).

Z. B. Aus $3 : 12 = 5 : 20$ erhält man:

nach α) $(3 + 12) : (5 + 20) = 3 : 5 = 12 : 20 \left(= \frac{3}{5}\right)$,

$(12 - 3) : (20 - 5) = 3 : 5 = 12 : 20 \left(= \frac{3}{5}\right)$,

nach β) $(3 + 5) : (12 + 20) = 3 : 12 = 5 : 20 \left(= \frac{1}{4}\right)$,

$(5 - 3) : (20 - 12) = 3 : 12 = 5 : 20 \left(= \frac{1}{4}\right)$.

Der Satz β) findet eine erweiterte Anwendung, wenn mehr als zwei gleiche Verhältnisse gegeben sind.

Es sei nemlich:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4 \ldots\ldots a_n : b_n.$$

Aus $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$ erhält man nach β):

$(a_1 + a_2) : (b_1 + b_2)$ $[= a_2 : b_2] = a_3 : b_3$, mithin neuerdings

$(a_1 + a_2 + a_3) : (b_1 + b_2 + b_3)$ $[= a_3 : b_3] = a_4 : b_4$, woraus wieder

$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) : (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$ $[= a_4 : b_4] = a_5 : b_5$.

---

in das andere ($\div$); umgekehrt machen wir's, wenn wir eine Gleichung, natürlich zwischen zwei Quotienten, nun als Proportion darstellen wollen.

Setzt man dieß selbe Verfahren so fort, so erhält man endlich:

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots . a_n) : (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots . b_n) = a_n : b_n \ldots .$$
$$= a_3 : b_3$$
$$= a_2 : b_2$$
$$= a_1 : b_1 ,$$

d. h. wenn mehrere gleiche Verhältnisse vorhanden sind, so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie irgend ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

Eine anderweitige Anwendung finden die Sätze α) und β) da, wo Proportionen, deren Glieder Summen oder Differenzen sind, hiedurch auf einen einfachern Ausdruck gebracht werden, wie denn derlei Proportionen namentlich in der Geometrie häufig vorkommen.

Z. B. $(a + b) : (a - b) = (d + x) : x$;

hieraus $[(a + b) - (a - b)] : [(d + x) - x] = (a - b) : x$

$$2b : d = (a - b) : x \text{ u. dgl.}$$

2) Ist $a : b = c : d$,

so auch $\frac{a}{b} \times m = \frac{c}{d} \times m$,

woraus entweder α) $\frac{am}{b} = \frac{cm}{d}$, d. i. $am : b = cm : d$,

oder β) $a : \frac{b}{m} = c : \frac{d}{m}$,

also in beiden Fällen wieder eine geometrische Proportion wird.

Permutiren wir sowohl in der gegebenen als in beiden abgeleiteten Proportionen die innern Glieder, so erhalten wir folgende weitere Proportionen:

$$a : c = b : d ,$$

und dann etwa α) $am : cm = b : d$,

oder β) $a : c = \frac{b}{m} : \frac{d}{m}$.

Alle die vier abgeleiteten Proportionen können wir, wenn wir genauer zusehen, mit Beziehung auf die beiden gegebenen in Einem Satze lesen. Welche Veränderungen nemlich (durch Multiplikation oder Division) an gewissen Gliedern vorgenommen sind, immer ist es je ein äußeres und ein inneres Glied, welche sich auf gleiche Art verändert finden. Da aber dieß, wie aus dem Bestehen der

vier abgeleiteten Proportionen hervorgeht, unbeschadet der Wahrheit der geometrischen Proportion geschieht, so folgt:

„Eine geometrische Proportion bleibt wahr, wenn man je ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multiplizirt oder dividirt."

Eine sehr häufig vorkommende Anwendung findet dieser Satz in zwei Fällen:

a) Wenn in den Gliedern einer Proportion Brüche vorkommen, so wird der Nenner eines solchen Bruches dadurch hinweggeschafft, daß man sowohl das Glied, welches ihn enthält, als auch ein entgegengesetztes, d. h. ein äußeres, wenn jenes ein inneres, und umgekehrt, damit multiplizirt. Hat man auf diese Weise nacheinander alle Nenner hinweggeschafft (auch wohl auf einmal, wenn man erst alle Glieder auf denselben Nenner bringt), so ist die Proportion auf einen neuen Ausdruck aus lauter ganzen Zahlen gebracht.

b) Enthält je ein äußeres und ein inneres Glied einen gemeinschaftlichen Faktor, so wird dieser durch Division der beiden Glieder mit demselben entfernt, ohne daß die Proportion aufhörte, wahr zu sein, aber sie ist jetzt, was immerhin vortheilhaft ist, auf einen einfachern Ausdruck (aus kleinern Zahlen) gebracht.

So erfährt die Proportion

$$22\frac{1}{2} : 9\frac{1}{6} = 3x : 3\frac{2}{3}$$

nacheinander folgende Veränderungen:

$$\frac{45}{2} : \frac{55}{6} = 3x : \frac{11}{3},$$

$$45 : \frac{55}{3} = 3x : \frac{11}{3},$$

$$45 : 55 = 3x : 11,$$

$$9 : 11 = 3x : 11;$$

$$9 : 1 = 3x : 1,$$

$$3 : 1 = x : 1,$$

woraus $x = 3$.

3) Zu den Veränderungen der Glieder durch Multiplikation gehört auch die sogenannte Zusammensetzung mehrerer geometrischen Proportionen in Eine.

Sind nemlich deren mehrere gegeben, wie

$$a_1 : b_1 = c_1 : d_1, \text{ oder } \frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1},$$

$$a_2 : b_2 = c_2 : d_2, \quad " \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2},$$

$$a_3 : b_3 = c_3 : d_3, \quad " \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{c_3}{d_3},$$

$$a_4 : b_4 = c_4 : d_4, \quad " \quad \frac{a_4}{b_4} = \frac{c_4}{d_4},$$

---

so ist offenbar $\frac{a_1}{b_1} \times \frac{a_2}{b_2} \times \frac{a_3}{b_3} \times \frac{a_4}{b_4} = \frac{c_1}{d_1} \times \frac{c_2}{d_2} \times \frac{c_3}{d_3} \times \frac{c_4}{d_4}$,

$$\text{oder } \frac{a_1\, a_2\, a_3\, a_4}{b_1\, b_2\, b_3\, b_4} = \frac{c_1\, c_2\, c_3\, c_4}{d_1\, d_2\, d_3\, d_4},$$

mithin $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 : b_1\, b_2\, b_3\, b_4 = c_1\, c_2\, c_3\, c_4 : d_1\, d_2\, d_3\, d_4$.

Leiten wir diese neue Proportion unmittelbar aus den gegebenen ab, so ist offenbar ihr erstes Glied das Produkt aus allen ersten Gliedern, ihr zweites das Produkt aus allen zweiten Gliedern der gegebenen Proportionen u. s. f. Daraus ziehen wir die Regel ab:

„Wenn man mehrere gegebene Proportionen Glied für Glied mit einander multiplizirt, so bilden diese Produkte wieder eine geometrische Proportion."

$$\text{Z. B. } 12 : 15 = 20 : 25 \left(= \frac{4}{5}\right),$$

$$13 : 31 = 52 : 124 \left(= \frac{13}{31}\right),$$

$$5 : 16 = 15 : 48 \left(= \frac{5}{16}\right),$$

$$80 : 3 = 200 : \frac{15}{2} \left(= \frac{80}{3}\right),$$

$$12 \times 13 \times 5 \times 80 : 15 \times 31 \times 16 \times 3 =$$
$$= 20 \times 52 \times 15 \times 200 : 25 \times 124 \times 48 \times \frac{15}{2},$$

$$62400 : 22320 = 3120000 : 1116000.$$

Es ist aber $\frac{62400}{22320} \overset{10}{=} \frac{6240}{2232} \overset{8}{=} \frac{780}{279} \overset{3}{=} \frac{260}{93}$;

ebenso $\frac{3120000}{1116000} \overset{1000}{=} \frac{3120}{1116} \overset{4}{=} \frac{780}{279} \overset{3}{=} \frac{260}{93}$.

Diese Zusammensetzung der Proportionen findet Anwendung, wenn mehrere geometrische Proportionen mit eben so viel unbekannten Gliedern in der Art gegeben sind, daß jede folgende Proportion ein unbekanntes Glied mit der vorhergehenden gemeinschaftlich enthält. Dabei ist aber vorausgesetzt, daß man nicht alle einzelnen Unbekannten auch wirklich zu kennen verlangt, sondern bloß diejenige, welche nur einmal und zwar in der letzten Proportion vorkommt. Eine Anzahl solcher zusammengesetzten Proportionen bilden dann einen sogenannten Kettensatz.

$$\begin{aligned} \text{z. B.}\quad 3 : 4 &= 9 : x, \\ 8 : 16 &= x : y, \\ 36 : 32 &= y : z, \\ 4 : 20 &= z : u, \end{aligned}$$

$$3 \times 8 \times 36 \times 4 : 4 \times 16 \times 32 \times 20 = 9xyz : xyzu,$$

woraus, wenn man das zweite Verhältniß durch xyz verkleinert,

$$3 \times 8 \times 36 \times 4 : 4 \times 16 \times 32 \times 20 = 9 : u.$$

Diese Verkleinerung*) kann aber offenbar, auch schon ehe man die Proportion wirklich zusammensetzt, eben so gut vorgenommen werden, wobei denn leicht zu bemerken ist, daß die zu eliminirenden Unbekannten nur dann aus der zusammengesetzten Proportion wegfallen, wenn je dieselbe Unbekannte in den zwei sie enthaltenden Proportionen abwechselnd ein äußeres und ein inneres Glied bildet. Wäre das in den gegebenen Proportionen nicht unmittelbar der Fall, so müßten sie vor der Zusammensetzung erst, wie gefordert, geordnet werden, wobei dann die Regeln, welche wir oben über die Veränderungen in den Stellungen der Glieder aufgestellt haben, zur allseitigen Anwendung kommen.

$$\begin{aligned} \text{z. B.}\quad 8 : 15 &= 4 : x, \\ x : 2 &= 9 : y, \\ z : y &= 6 : 8, \\ 10 : u &= 15 : z, \end{aligned}$$

*) Es versteht sich von selbst, daß auch von den übrigen Zahlen solche, die in irgend einer der gegebenen Proportionen ein äußeres Glied bilden, gegen solche verkleinert werden dürfen, die irgendwo ein inneres Glied bilden.

sind so zu ordnen:

$$8 : 15 = 4 : x,$$
$$9 : y = x : 2, \text{ (die Verhältnisse verwechselt)}$$
$$y : z = 8 : 6, \text{ (invertirt)}$$
$$z : u = 15 : 10, \text{ (die äußern Glieder permutirt)}$$

$$3 : 5u = 1 : 2,$$
$$5u = 6,$$
$$u = 1\frac{1}{6}.$$

4) Ist $a : b = c : d$,

so auch $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m$, wie $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}}$,

$$\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}, \text{ und } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}},$$

welche Gleichungen abermals geometrische Proportionen bilden, nemlich:

$a^m : b^m = c^m : d^m$ und $\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$.

Daraus leiten wir die Regel ab:

„Eine geometrische Proportion bleibt wahr, wenn alle ihre Glieder mit derselben Zahl potenzirt oder durch dieselbe Zahl radizirt werden."

z. B. $3 : 4 = 6 : 8 \left(= \frac{3}{4}\right)$,

$3^2 : 4^2 = 6^2 : 8^2$,

$9 : 16 = 36 : 64 \left(= \frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$,

oder $1 : 4 = 9 : 36 \left(= \frac{1}{4}\right)$,

$\sqrt[2]{1} : \sqrt[2]{4} = \sqrt[2]{9} : \sqrt[2]{36}$,

$1 : 2 = 3 : 6 \left(= \frac{1}{2} = \sqrt[2]{\frac{1}{4}}\right)$.

5) Endlich folgt aus:

$$a : b = c : d,$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{c}{d}},$$
oder $$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{c} - \sqrt{d}.$$

Durch Logarithmiren entsteht also nicht wieder eine geometrische, sondern wenn man alle Glieder einer geometrischen Proportion auf dieselbe Basis logarithmirt, eine arithmetische Proportion.

Vermischte Aufgaben über die Veränderungen an den Gliedern einer geometrischen Proportion.

1) Es soll die Wahrheit der folgenden Proportion durch Herstellung zweier identischen Verhältnisse nachgewiesen werden:

$$(\sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{a}):(\sqrt[2]{x}-\sqrt[2]{a})=(x+a+2\sqrt[2]{ax}):(x-a).$$

Es ist nun:

1) $2\sqrt[2]{x}:(2x+2\sqrt[2]{ax})=(\sqrt[2]{x}-\sqrt[2]{a}):(x-a)$ [nach 1) α)],

2) $\sqrt[2]{x}:(x+\sqrt[2]{ax})=(\sqrt[2]{x}-\sqrt[2]{a}):(x-a)$ [nach 2) b) durch 2 verkleinert],

3) $\sqrt[2]{a}:(a+\sqrt[2]{ax})=\sqrt[2]{x}:(x+\sqrt[2]{ax})$ [nach 1) β)], mithin

4) $1:(\sqrt[2]{a}+\sqrt[2]{x}=1:(\sqrt[2]{x}+\sqrt[2]{a})$ [einerseits durch $\sqrt[2]{a}$, andrerseits durch $\sqrt[2]{x}$ verkleinert].

Gibt man den Summanden in den beiden Hintergliedern dieselbe Stellung, so sind die beiden Verhältnisse offenbar die nämlichen.

2) Aus der folgenden Proportion soll der Werth der Zahl x bestimmt werden:

$$(x-\sqrt[2]{5}):2x=(x-10):(2x+\sqrt[2]{20}).$$

Wir erhalten:

1) $(x-\sqrt[2]{5}):x=(x-10):(x+\sqrt[2]{5})$ [durch 2 verkleinert],

2) $\sqrt[2]{5}:(10+\sqrt[2]{5})=x:(x+\sqrt[2]{5})$

3) $10:\sqrt[2]{5}=\sqrt[2]{5}:x$,

4) $100:5=5:x^2$ [nach 4)],

5) $4:1=1:x^2$ [durch 5 zweimal verkleinert],

} beidemal wurde der Satz angewendet: „Die Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses ꝛc.“

woraus $4x^2=1$

und $x^2=\frac{1}{4}$, oder $x=\frac{1}{2}$.

3) Aus der Proportion:

$$1 : (1 + \sqrt[2]{x}) = \frac{1}{1 - \sqrt[2]{x}} : (1 - \sqrt[2]{x})$$

soll x bestimmt werden.

Nun haben wir:

1) $(1 - \sqrt[2]{x}) : (1 + \sqrt[2]{x}) = 1 : (1 - \sqrt[2]{x})$ [der Divisor $(1 - \sqrt[2]{x})$ nach 2) a) hinweggeschafft],

2) $2 : (2 - \sqrt[2]{x}) = (1 - \sqrt[2]{x}) : 1$ [nach 1) α)],

3) $\sqrt[2]{x} : -\sqrt[2]{x} = 2 : (1 - \sqrt[2]{x})$ [nach 1) α)],

4) $1 : -1 = 2 : (1 - \sqrt[2]{x})$ [durch $\sqrt[2]{x}$ verkleinert],

5) $3 : -\sqrt[2]{x} = 1 : -1$ [nach 1) β)],

6) $9 : x = 1 : 1$ [nach 4)],

daher $x = 9$.

§. 85.

Entsprechend den stetigen arithmetischen unterscheidet man auch stetige geometrische Proportionen, nemlich solche, welche die beiden innern Glieder gleich haben, z. B.:

$$a : b = b : c.$$

Die Zahl b heißt hiebei die mittlere geometrische Proportionale (a : b : c, vergl. §. 80) zwischen a und c; man findet sie, falls sie unbekannt, also $b = x$ ist, aus der Produkten-Gleichung:

$$x^2 = ac,$$

$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{ac},$$

$$x = \sqrt[2]{ac};$$

d. h. man findet die mittlere geometrische Proportionale zwischen zwei Zahlen, indem man aus dem Produkte derselben die Quadratwurzel zieht.

Z. B. Die mittlere geometrische Proportionale zwischen 2 und 18 zu suchen:

$$2 : x = x : 18,$$

$$x^2 = 36,$$

$$x = 6,$$

mithin $2 : 6 = 6 : 18 \left(= \frac{1}{3}\right)$.

Man kann, wie ein arithmetisches, so auch ein geometrisches Mittel auch aus mehrern Zahlen bestimmen, z. B. aus a_1, a_2, a_3, a_4, a_5.

Wir haben nemlich:

$$a_1 : x_1 = x_1 : a_2,$$
$$a_3 : x_2 = x_2 : a_4,$$
$$a_5 : x_3 = 1 \text{ *)},$$

woraus $a_1\, a_3\, a_5 : x_1\, x_2\, x_3 = x_1\, x_2 : a_2\, a_4$.

Soll es hier Ein geometrisches Mittel aus allen gegebenen Zahlen zugleich geben, so muß $x_1 = x_2 = x_3 = x$ sein; dann ist

$$a_1\, a_3\, a_5 : x\, x\, x = x\, x : a_2\, a_4,$$
$$\text{woraus } x^5 = a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$$
$$\text{und } x = \sqrt[5]{a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5}.$$

Man findet also das geometrische Mittel aus mehrern Zahlen, indem man das Produkt aus denselben durch ihre Anzahl radizirt.

Wenn man diese Gleichung logarithmirt, so erhält man:

$$\log x = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \log a_4 + \log a_5}{5},$$

d. h. der Logarithmus des geometrischen Mittels zwischen mehrern Zahlen ist das arithmetische Mittel aus den Logarithmen dieser Zahlen. **)

---

*) Eigentlich hat man $a_5 : x_3 = x_3 : a_5$, daher $x_3^2 = a_5^2$, $x_3 = a_5$ und $\frac{a_5}{x_3} = 1$.

**) Den logarithmischen Ausdruck des geometrischen Mittels haben wir bereits im §. 73 zur Berechnung der Logarithmen der Zifferzahlen benützt. Die dieser Berechnung zu Grunde gelegte Gleichung $\log x = \frac{\log a + \log c}{2}$ ist nemlich aus $a : x = x : c$ abgeleitet, woraus $x = \sqrt[2]{ac}$, und so $\log x = \frac{\log a + \log c}{2}$.

Anwendung der geometrischen Proportion.

§. 86.

Wenn zwei Größen A und B in der nothwendigen Beziehung zu einander stehen, daß

α) mit der Zu- oder Abnahme der einen um ein irgend Vielfaches auch die andere um das eben so Vielfache zu- oder abnimmt; oder daß

β) mit der Zu- oder Abnahme der ersten umgekehrt die Ab- oder Zunahme der zweiten um das gleich Vielfache bedingt ist —

so stehen gemäß dem in §. 75 sub 4) und 3) Gesagten diese Größen A und B, oder genauer gesprochen, die Zahlen, durch welche sie in irgend Einheiten ausgedrückt sind,

α) im ersten Falle offenbar in dem Verhältnisse von veränderlichen Theilen eines bestimmten, sich gleich bleibenden Quotienten, oder im geraden geometrischen Verhältnisse;

β) im zweiten Falle aber in dem von veränderlichen Faktoren eines bestimmten, sich gleich bleibenden Produktes oder im verkehrten geometrischen Verhältnisse.

Welches also die Zahlenwerthe seien, durch welche die Größen A und B im einzelnen Falle ausgedrückt sind, immer ist bei α) der Quotient, bei β) das Produkt aus denselben das nämliche.

Sind nun die Zahlen, durch welche die Größen A und B ausgedrückt sind, einmal a_1 und b_1, ein anderes Mal a_2 und b_2 (wobei a_1 und a_2 die veränderlichen Einzelwerthe derselben Größe A, b_1 und b_2 die der Größe B, hingegen a_1 und b_1 einerseits, a_2 und b_2 andrerseits die je zusammengehörigen Einzelwerthe beider Größen A und B sind), so müssen diese Zahlen, oder, wie sie eben bestimmter bezeichnet worden sind, die je zusammengehörigen Einzelwerthe beider Größen

α) im ersten Falle als die entsprechenden Theile zweier gleichen Quotienten,

β) im zweiten als die Faktoren zweier gleichen Produkte angesetzt werden.

Wir erhalten also die Proportionen:

α) $a_1 : b_1 = a_2 : b_2$,

β) $a_1 b_1 = a_2 b_2$.

Hinsichtlich der Formation dieser Proportionen sind jedoch noch zwei Punkte näher in's Auge zu fassen, nemlich

1) die Stellung der Glieder in den Verhältnissen,

2) die Vertretung der Größen A und B durch die Zahlen.

1) Was das Erstere betrifft, so ist in β) offenbar die Stellung der Faktoren in den Produkten ganz gleichgültig; anders aber ist es in α). Weil hier, wenn $a_1 > b_1$, auch $a_2 > b_2$, oder wenn $a_1 < b_1$, auch $a_2 < b_2$ (denn wie die einfachen Zahlen, so verhalten sich auch die gleichen vielfachen von ihnen), so kann die Stellung der Glieder in den Verhältnissen keine andere als die obige oder auch die invertirte $b_1 : a_1 = b_2 : a_2$ sein, weil sonst nicht beide Verhältnisse steigend oder beide zugleich fallend wären, was sie nach §. 83. a) sein müssen. Diese Stellung muß also in jedem Falle der Art sein, daß „je die Einzelwerthe derselben Größe homologe Glieder der Proportion bilden," welche Regel denn bei der Formation solcher Proportionen wohl zu beachten ist.

2) Hinsichtlich des zweiten Punktes muß an dem Hauptinhalte der Proportion festgehalten werden; diesen bildet die Aussage: „das wie Vielfache a_2 von a_1, das ebenso Vielfache ist b_2 von b_1" für die gerade, und die: „das wie Vielfache a_2 von a_1, das ebenso Vielfache ist umgekehrt b_1 von b_2" für die verkehrte Proportion. Ist nun diese Aussage in dem Ausdrucke durch die bloßen Zahlen gerade so enthalten, als in dem durch die Größen selbst, so können Erstere die Letztern vollkommen vertreten, d. h. die Proportion zwischen den Zahlen ist dann eben so wahr als die zwischen den Größen selbst. Dieß ist aber nur dann der Fall, wenn die Größen durch Zahlen derselben Einheit ausgedrückt sind: so sind z. B. 60 kr. das ebenso Vielfache von 1 kr., als 60 von 1, aber keineswegs 1 fl. das ebenso Vielfache von 1 kr. als die Zahl 1 von der Zahl 1.*) Würde also in einer Proportion statt des Ausdruckes durch die Größen 1 fl. und 1 kr. der durch die Zahlen 1 und 1 gesetzt werden, so würde die letztere Aussage keineswegs dieselbe wie die erstere sein; die letztere kann also auch nicht für die erstere gesetzt, und sonach

---

*) $\frac{60\text{ kr.}}{1\text{ kr.}} = \frac{60 \,.\, 1\text{ kr.}}{1 \,.\, 1\text{ kr.}} = \frac{60}{1}$, aber $\frac{1\text{ fl.}}{1\text{ kr.}} = \frac{1 \,.\, 1\text{ fl.}}{1 \,.\, 1\text{ kr.}} = \frac{1\text{ fl.}}{1\text{ kr.}}$, nicht $= \frac{1}{1}$.

die Größen nie durch andere als durch Zahlen derselben Einheit vertreten werden.

Dasselbe an einer ganzen Proportion klar zu machen, hätten wir das folgende Beispiel:

m Ztr. kosten a fl.; x kr. kosten n ℔?

Hier können wir zwar ansetzen:

m Ztr. : a fl. = n ℔ : x kr.,

was so viel sagen will als: „m Ztr. müssen, um in n ℔ überzugehen, um das eben so Vielfache vermindert werden, als a fl., damit x kr. daraus werden;" aber die hier gebrauchten Zahlen m und n, a und x sind keineswegs diejenigen, welche durch m : n oder a : x das Verhältniß der wirklichen Abnahme ausdrücken, daher man eben auch keineswegs obige Proportion durch die ersetzen kann:

m : a = n : x.

Erst wenn die Einzelwerthe derselben Größe (des Gewichtes einer-, des Preises andrerseits) in Zahlen derselben Einheit ausgedrückt sind, etwa die erstern in Pfunden, die letztern in Kreuzern, besteht zwischen diesen Zahlen dasselbe Verhältniß der gleich vielfachen Ab- oder Zunahme wie zwischen den betreffenden Größen selbst, und nun kann an die Stelle der durch die Größen ausgedrückten Proportion die durch die Zahlen ausgedrückte treten, nemlich zunächst

100 m ℔ : 60 a kr. = n ℔ : x kr.,

und dann für die Rechnung die bloße Zahlen-Proportion:

100 m : 60 a = n : x.

Was nun endlich die Anwendung für bestimmte einzelne Aufgaben betrifft, so gibt es deren so viele und so mannigfache, daß wir wohl thun werden, sie in einige mehr oder weniger zusammengehörige Gruppen zu sondern, wie folgt.

§. 87.

Aufgaben der einfachen Proportion.

(Regel de tri.)

1) $4\frac{3}{4}$ Ellen Tuch kosten $20\frac{9}{10}$ fl.; was kosten $7\frac{1}{3}$ Ellen davon?

Auflösung. Wenn das Preisverhältniß bei dem einen wie bei dem andern Einkaufe dasselbe bleibt (und das ist bei allen

derartigen Aufgaben unabänderlich vorausgesetzt)*), so vermehrt oder vermindert sich der Preis der Waare ebenso vielmal als die Quantität der Waare selbst, d. h. für die doppelte, dreifache ꝛc. Quantität der Waare wird man auch den doppelten, dreifachen ꝛc. Preis bezahlen müssen. Es findet also zwischen der Waare und ihrem Preise ein gerades geometrisches Verhältniß statt, und sind mithin [§. 86. 2)] je die zusammengehörigen Einzelwerthe beider als die entsprechenden Theile zweier gleichen Quotienten anzusetzen.

Wir haben sonach:

$$4\frac{3}{4}\text{ Elle} : 20\frac{9}{10}\text{ fl.} = 7\frac{1}{3}\text{ Elle} : x\text{ fl.}$$

Da hier die Einzelwerthe je derselben Größe, welche nach §. 86. 1) je als homologe Glieder angesetzt worden, auch bereits, wie es 2) desselben §. verlangt, in den gleichen Einheiten ausgedrückt sind, so darf zum Behufe der Rechnung an die Stelle obiger Proportion unmittelbar die bloße Zahlen-Proportion treten:

$$4\frac{3}{4} : 20\frac{9}{10} = 7\frac{1}{3} : x, \text{ woraus}$$

$$\frac{19}{4} : \frac{209}{10} = \frac{22}{3} : x,$$

$$\frac{1}{4} : \frac{11}{10} = \frac{22}{3} : x,$$

$$1 : \frac{22}{5} = \frac{22}{3} : x,$$

$$15 : 22 = 22 : x,$$

$$15x = 484,$$

$$x = 32\frac{4}{15}.$$

$$\text{Also } x\text{ fl.} = 32\frac{4}{15}\text{ fl.} = 32\text{ fl. }16\text{ kr.}$$

---

*) Wäre das nicht, so könnte ich eben so gut fragen: „was kosten 3 Ellen grobes, wenn 2 Ellen feines Tuch 13 fl. kosten?“ oder gar: „was kosten 6 ℔ Brod, wenn 3 Ellen Leinwand auf 1 fl. 3 kr. kommen?“ Fragen, die offenbarer Unsinn sind, weil darin eben alle nothwendige Beziehung der Größen aufeinander fehlt, während die Form der Frage eine solche statuirt.

2) 4 ℔ 11 Lth. einer gewissen Waare kosten 34 kr. 3 dl.; wie viele fl. 3 Ztr. 52 ℔?

Auflösung. Da auch hier wie immer zwischen der Waare und ihrem Preise ein gerades geometrisches Verhältniß ist, so haben wir:

4 ℔ 11 Lth. : 34 kr. 3 dl. = 3 Ztr. 52 ℔ : x fl.;

da aber die homologen Glieder noch nicht in denselben Einheiten, ja überhaupt nicht einmal jedes einzeln in Einer Einheit ausgedrückt ist, so müssen erst die nöthigen Solutionen oder Reduktionen, wie man solche aus der Arithmetik her kennt, gemacht und hiedurch die homologen Glieder auf dieselben Einheiten gebracht werden.

Es ist nemlich a) durch Solution:

1) 4 ℔ 11 Lth. = 4 × 32 + 11 Lth. = 139 Lth.;
2) 3 Ztr. 52 ℔ = 3 × 100 + 52 ℔ = 352 × 32 Lth. = = 11264 Lth.;
3) 34 kr. 3 dl. = 34 × 4 + 3 dl. = 139 dl.

Und nun gilt: 139 Lth. : 139 dl. = 11264 Lth. : x dl.;

hienach auch die Zahlen-Proportion:

$$139 : 139 = 11264 : x,$$
$$1 : 1 = 11264 : x,$$

woraus $x = 11264$,

und daher x dl. = 11264 dl. = 2816 kr. = 46 fl. 56 kr.

b) durch Reduktion:

1) $4\,℔\ 11\,\text{Lth.} = 4\frac{11}{32}\,℔ = \frac{139}{32}\,℔ = \frac{139}{32} : 100\,\text{Ztr.} = \frac{139}{3200}\,\text{Ztr.}$;

2) $3\,\text{Ztr.}\ 52\,℔ = 3\frac{52}{100}\,\text{Ztr.} = \frac{352}{100}\,\text{Ztr.}$;

3) $34\,\text{kr.}\ 3\,\text{dl.} = 34\frac{3}{4}\,\text{kr.} = \frac{139}{4}\,\text{kr.} = \frac{139}{4} : 60\,\text{fl.} = \frac{139}{240}\,\text{fl.}$

Und nun ist: $\frac{139}{3200}$ Ztr. : $\frac{139}{240}$ fl. = $\frac{352}{100}$ Ztr. : x fl.,

daher auch $\frac{139}{3200} : \frac{139}{240} = \frac{352}{100} : x,$

$$\frac{1}{32} : \frac{1}{240} = 352 : x,$$
$$15 : 2 = 352 : x,$$
$$15x = 704,$$
$$x = 46\frac{14}{15}.$$

Mithin ist x fl = $46\frac{14}{15}$ fl. = 46 fl. 56 kr. wie oben.

3) Welchen Jahreszins trägt ein Kapital von 7180 fl. zu 5 Prozent (5 %), d. h. wenn für ein Kapital von 100 fl. ein Jahreszins von 5 fl. bezahlt wird?

Auflösung. Die Benützung einer Summe Geldes, des Kapitals, gewöhnlich auf ein Jahr, gilt als eine Waare, für welche ein gewisser Preis, Zins genannt, bezahlt wird. Kapital und Zinsen stehen daher wie die Waare und ihr Preis im geraden geometrischen Verhältnisse. Wir haben also:

$$7180 \text{ fl. K.} : x \text{ fl. Z.} = 100 \text{ fl. K.} : 5 \text{ fl. Z.},$$
$$\text{daher auch } 7180 : x = 100 : 5,$$
$$718 : x = 2 : 1,$$
$$359 : x = 1 : 1,$$
$$x = 359.$$

Es sind also die x fl. Z. = 359 fl. Z.

4) A hat sich von B für irgend einen Zins die Benützung eines Kapitals von 9000 fl. auf 4 Jahre ausbedungen; er bedürfte aber 12000 fl.: wie lange müßte ihm nun B die Benützung dieses Kapitals für denselben Zins zugestehen?

Auflösung. Je vielmal größer ein Kapital ist, in ebenso vielmal kürzerer Zeit trägt es die gleichen Zinsen (gleiche Prozente vorausgesetzt), mithin besteht zwischen dem Kapital und der Zeit seiner Benützung ein verkehrtes geometrisches Verhältniß. Nach §. 86. β) sind daher je die zusammengehörigen Einzelwerthe beider Größen als die Faktoren zweier gleichen Produkte anzusetzen, womit wir denn haben:

$$9000 \text{ fl. K.} \times 4 \text{ J.} = 12000 \text{ fl. K.} \times x \text{ J.},$$

und weil je die Einzelwerthe derselben Größe ohnehin in gleichen Einheiten ausgedrückt sind, auch:

$$9000 \times 4 = 12000 \times x,$$
$$\frac{36000}{12000} = x$$
$$\text{und } x = 3.$$

Mithin ist die Antwort: auf 3 Jahre.

5) Für eine Schiffs-Mannschaft von 450 Köpfen ist Proviant auf 6 Monate geladen; wie viele Monate wird derselbe Proviant ausreichen, wenn die Mannschaft noch um 150 (auf 600) vermehrt wird?

Auflösung. Offenbar wird ein gewisser Proviant um so längere Zeit reichen, je kleiner die Zahl der davon Zehrenden ist (gleichen Verbrauch für den Einzelnen vorausgesetzt) und zwar so, daß der Vorrath doppelt so lang reicht, wenn die Anzahl dieser auf die Hälfte gesetzt wird, u. s. w. Es besteht also zwischen der Zeit, während welcher ein gewisser Vorrath ausreicht, und zwischen der Anzahl Derer, die davon zehren, ein verkehrtes geometrisches Verhältniß, mithin ist nach §. 86. β) anzusetzen:

$$450\,\text{M.} \times 6\,\text{Mt.} = 600\,\text{M.} \times x\,\text{Mt.},$$

welche Proportion der gleichen Einheiten wegen, in denen die Einzelwerthe je derselben Größe ausgedrückt sind, durch die Zahlengleichung ersetzt wird:

$$450 \times 6 = 600 \times x,$$

$$\text{woraus } x = \frac{2700}{600} = 4\frac{1}{2}.$$

$$\text{Es sind also } x\,\text{Mt.} = 4\frac{1}{2}\,\text{Mt.}$$

§. 88.

Aufgaben der zusammengesetzten Proportion.

In vielen Fällen hängt die Bestimmung einer Größe nicht von einer zweiten allein, sondern von mehrern zugleich ab, so z. B. der Preis eines Stückes Tuch nicht bloß von dessen Länge, sondern auch von der Breite, der Preis einer gewissen Gewichtsmenge Brod nicht bloß von dieser Menge, sondern auch von dem Getreidpreise u. dgl. Will man nun solche zusammengesetzte Abhängigkeits-Verhältnisse ebenso wie die bisherigen einfachen auf ihren mathematischen Ausdruck bringen, so führen sie auf zusammengesetzte Proportionen und das in folgender Weise:

In den bisherigen Fällen, die auf einfache Proportionen führten, weil die Bestimmung einer jeden darin vorkommenden Größe nur von einer zweiten Größe abhing, und so immer einer der beiden Fälle α) oder β) des §. 86. einfach eintrat, enthielt der setzende Theil (z. B. $4^3/_4$ Ellen kosten $20^9/_{10}$ fl.) oder die Angabe jedesmal zwei Größen, der fragende (z. B. wie viele fl. kosten $7^1/_3$ Ellen?) oder die Frage natürlich ebenfalls zwei, von welchen vier Größen drei gegeben (tres positae) sein mußten, um vermittelst der angesetzten Proportion [regula de tri (bus positis)] die vierte, unbekannte

zu berechnen. Ganz anders aber stellt sich die Anzahl dieser Größen heraus, wenn zusammengesetzte Abhängigkeits-Verhältnisse und nicht jene einfachen Statt finden. Ist nemlich eine Größe von zweien oder aber von dreien andern zugleich abhängig, so muß sowohl die Angabe als natürlich auch die Frage im ersten Falle 3, im zweiten 4 Größen, nemlich immer außer der bestimmten auch die bestimmenden alle, enthalten. So z. B. enthält die Angabe: „3 Ellen $^3/_4$ (Ellen) breites Tuch kosten 15 fl." drei Größen, welchen entsprechend auch die Frage deren drei enthalten muß, und so in allen ähnlichen Fällen. In Eine Proportion, das sieht man wohl, lassen sich die 6, 8, 10 ... Größen nicht bringen, denn Eine Proportion besteht unabänderlich aus vier Gliedern; wenn aber in mehrere, so sind offenbar der hiezu nöthigen Proportionen um so mehrere, je mehrere Größen vorhanden sind. Wir müssen also nach der Zahl dieser unterscheiden:

1) Enthält die Angabe drei und die Frage drei Größen, so können aus diesen sechs mit Einer Hilfsgröße, welche wie im Kettensatze des §. 84. 3) in zwei Proportionen zugleich, also zweimal vorkommt, zwei vollständige Proportionen angesetzt werden. Setzt man diese hierauf zusammen, so entsteht eine neue Proportion, in welcher die gebrauchte Hilfsgröße nicht mehr vorkömmt, und vermittelst welcher man aus den gegebenen fünf Größen die unbekannte sechste (regula (de) quinque) berechnet.

2) Enthalten Angabe und Frage je vier Größen, so möchte man meinen, aus diesen acht Größen bereits zwei vollständige Proportionen ansetzen zu können; allein dem steht entgegen, daß schon zu sechs gegebenen Größen zwei Proportionen nöthig sind, um sie zu fassen, und daß daher zu acht deren mehr, also wohl drei hiezu erforderlich sein werden. Die Ausführung von derlei Ansätzen in wirklich gegebenen Fällen (solche werden unten folgen) bestätigt das auch: man muß nemlich hiebei immer, um nur Proportionen ansetzen zu können, zwei Hilfsgrößen herbeiziehen, welche wie oben sub 1) je in zwei Proportionen stehend zusammen vier Glieder bilden und daher mit den gegebenen acht die Anzahl von zwölf Gliedern dreier Proportionen voll machen. Setzt man dann diese drei Proportionen in Eine nach §. 84. 3) zusammen, so kann vermittelst dieser, aus welcher übrigens die angenommenen zwei Hilfsgrößen nun wieder weggefallen sind, aus den gegebenen sieben Größen (regula (de) septem) die unbekannte achte hergestellt werden.

3) In derselben Weise sind, wenn Angabe sowohl als Frage je fünf Größen enthalten, drei Hilfsgrößen zum Ansatze von vier Proportionen, wenn je sechs, vier Hilfsgrößen zu fünf Proportionen u. s. w. erforderlich. Vermittelst der zusammengesetzten Proportion wird sodann aus neun gegebenen Größen (regula novem) die unbekannte zehnte, oder aus eilf (regula undecim) die unbekannte zwölfte u. s. w. berechnet.

Welche Hilfsgrößen aber anzunehmen, und wie mit ihnen die nöthigen Proportionen zu formiren sind, erhellt am besten aus den folgenden Beispielen.

Beispiele.

1) Ein Kapital von 36000 fl. trägt in 1 Jahre 1200 fl. Zinsen: wie viele fl. Zinsen tragen [bei gleicher Verzinsung] 7500 fl. in 4 Jahren?

Auflösung.

Allgemeiner Ansatz.

Angabe.	Frage.
36000 fl. K. 1 J. 1200 fl. Z.;	7500 fl. K. 4 J. ? fl. Z.?

Hilfs-Ansätze.

I.*) (36000 K.) 1 J. 1200 Z.;	(36000 K.) 4 J. x Z.?
II. 36000 K. (4 J.) x Z.;	7500 K. (4 J.) y Z.?

Diese Hilfs-Ansätze werden, wie ersichtlich, auf folgende Art gebildet:

I. Zur ersten Hilfs-Angabe nimmt man die allgemeine Angabe unverändert; in der ersten Frage aber läßt man außer der unbekannten Größe nur noch eine (hier 4 J.) von den Größen der Angabe verschieden und der entsprechenden Größe der Frage gleich sein.

II. Die zweite Angabe ist gleich der ersten Frage, wobei sich's von selbst versteht, daß hier x Z. nicht mehr fragend, sondern setzend gebraucht wird; in der zweiten Frage aber läßt man außer der unbekannten Größe nun wieder eine weitere

---

*) Wenn die Ansätze gemacht sind, werden die Größen, welche in der Angabe und Frage gleichlautend, weil sie für den Ansatz ohne Bedeutung sind, weggelassen und das durch die Klammern angezeigt, in welche sie eingeschlossen werden.

Größe (hier 7500 K.) von denen dieser zweiten Angabe verschieden und abermals der entsprechenden Größe der Frage gleich sein.

III. So wird denn immer die vorhergehende Frage zur folgenden Angabe gemacht, und in der zu dieser gehörigen Frage außer der unbekannten Größe immer wieder eine von den Größen der Angabe verschiedene aber der entsprechenden der Frage gleiche Größe gesetzt, bis endlich die hiebei erhaltene Frage mit der allgemeinen Frage völlig übereinstimmt.

Durch dieses Verfahren erhält man offenbar nur solche Ansätze, deren Angabe und Frage bloß in je zwei Gliedern verschieden sind, auf welche hin sich sodann die Proportion formiren läßt, wie im Folgenden geschieht.

Es sagt nemlich Ansatz I.: „ein gewisses Kapital (36000 fl.) trägt in 1 Jahre 1200 fl. Z.; wie viel fl. Z. trägt dasselbe Kapital in 4 J.? Je mehr Jahre aber ein Kapital benützt wird, um so mehr Zinsen müssen dafür gegeben werden, so daß also zwischen der Zeit und den in derselben verfallenden Zinsen (bei gleichem Kapitale, wie hier der Fall) ein gerades geometrisches Verhältniß besteht. Wir haben sonach:

$$1\,\text{J.} : 1200\,\text{Z.} = 4\,\text{J.} : x\,\text{Z.}$$

Der Ansatz II. sagt: „ein Kapital von 36000 fl. trägt in einer gewissen Zeit (4 J.) einen Zins von x fl.; welchen Zins wird in derselben Zeit ein Kapital von 7500 fl. tragen?“ Zwischen Kapital und Zins findet, wie wir schon gesehen (§. 87. 3te Aufgabe) bei gleicher Zeit der Benützung, wie hier der Fall, ein gerades geometrisches Verhältniß Statt; mithin haben wir:

$$36000\,\text{K.} : x\,\text{Z} = 7500\,\text{K} : y\,\text{Z.}$$

Die beiden Proportionen zusammengesetzt, erhält man:

$$1\,\text{J.} : 1200\,\text{Z.} = 4\,\text{J.} : x\,\text{Z.},$$
$$36000\,\text{K.} : x\,\text{Z.} = 7500\,\text{K.} : y\,\text{Z.},$$

$$(36000\,\text{K.} \times 1\,\text{J.}) : 1200\,\text{Z.} = (7500\,\text{K.} \times 4\,\text{J.}) : y\,\text{Z.}$$

Bemerken wir hier, daß die Größe der zu bezahlenden Zinsen-Summe nicht bloß von der Größe des Kapitals, sondern auch von der Länge der Zeit seiner Benützung, also von diesen beiden Grö-

ßen, Kapital und Zeit, zusammen abhängt, so können wir die erhaltene zusammengesetzte Proportion offenbar so lesen:

„Die abhängige (bestimmte) Größe (der Zins) steht im geraden geometrischen Verhältniße mit dem Produkte aus den beiden bestimmenden Größen (Kapital und Zeit)."

2) 3 Arbeiter haben in 5 Tagen 915$^{c'}$ Erde ausgehoben, wobei sie täglich 8 Stunden arbeiteten: wie viel Kubikfuß können 20 Arbeiter in 12 Tagen bei täglich 10stündiger Arbeit ausheben?

Auflösung.

Allgemeiner Ansatz.

Angabe.	Frage.
3 A. 5 T. 8 St. 915$^{c'}$;	20 A. 12 T. 10 St. ?$^{c'}$?

Hilfs-Ansätze.

I. 3 A. (5 T. 8 St.) 915$^{c'}$;	20 A. (5 T. 8 St.) x$^{c'}$?
II. (20 A.) 5 T. (8 St.) x$^{c'}$;	(20 A.) 12 T. (8 St.) y$^{c'}$?
III. (20 A. 12 T.) 8 St. y$^{c'}$;	(20 A. 12 T.) 10 St. z$^{c'}$?

Der Ansatz I. enthält: 3 Arbeiter heben in einer gewissen Zeit 915$^{c'}$ Erde aus; wie viele c$'$ werden 20 Arbeiter in derselben Zeit ausheben? Je mehr Arbeiter, desto mehr Kubikfuß ausgehobener Erde — also ein gerades geometrisches Verhältniß, mithin:

$$\text{I. } 3\text{ A.} : 915^{c'} = 20\text{ A.} : x^{c'}$$

Der Ansatz II. sagt: Eine gewisse Anzahl Arbeiter heben in 5 Tagen x$^{c'}$ Erde aus; wie viel werden dieselben Arbeiter bei gleicher täglicher Arbeitszeit in 12 Tagen fördern? Offenbar je länger, desto mehr — also ein gerades geometrisches Verhältniß, mithin:

$$\text{II. } 5\text{ T.} : x^{c'} = 12\text{ T} : y^{c'}.$$

Ansatz III. heißt: Eine gewisse Anzahl von Arbeitern heben in einer gewissen Zahl von Tagen y$^{c'}$ Erde aus, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; wie viel aber, wenn sie statt 8 täglich 10 Stunden an der Arbeit sind? Je länger sie täglich arbeiten, desto mehr bringen sie zuwege — also ein gerades geometrisches Verhältniß, mithin:

$$\text{III. } 8\text{ St.} : y^{c'} = 10\text{ St.} : z^{c'}.$$

Setzen wir die drei Proportionen zusammen, so haben wir:

$$3\text{ A.} : 915^{c'} = 20\text{ A.} : x^{c'},$$
$$5\text{ T.} : x^{c'} = 12\text{ T.} : y^{c'},$$
$$8\text{ St.} : y^{c'} = 10\text{ St.} : z^{c'},$$

woraus $(3\text{ A.} \times 5\text{ T.} \times 8\text{ St.}) : 915^{c'} = (20\text{ A.} \times 12\text{ T.} \times 10\text{ St.}) : z^{c'}$.

Bemerken wir nun wieder, daß die Menge der auszuhebenden Erde nicht bloß 1) von der Anzahl der Arbeiter, sondern 2) auch von der Zahl der Tage und endlich 3) noch von der Zahl der Stunden abhängt, während welcher dieselben täglich arbeiten, daß also diese drei Größen zusammen die auszuhebende Quantität Erde bestimmen, so können wir obige durch Zusammensetzung der drei Proportionen erhaltene Eine Proportion so lesen:

„Das Produkt aus den zusammen bestimmenden Größen steht im geraden geometrischen Verhältnisse mit der bestimmten (abhängigen) Größe,"

welcher Satz mit dem durch Aufgabe 1) erhaltenen vollkommen übereinstimmt.

3) 10 Arbeiter haben in einer gewissen Zeit einen Graben von 1200′ Länge, 6′ mittlerer Breite und $3^1/_2$′ Tiefe ausgehoben: wie viele Arbeiter sind nöthig, um in derselben Zeit bei übrigens gleichen Umständen einen Kanal von 21000′ Länge, 30′ mittlerer Breite und 10′ Tiefe zu graben?

Auflösung.

Allgemeiner Ansatz.

Angabe.	Frage.
10 A. 1200′ L. 6′ B. $3^1/_2$′ T.;	? A. 21000′ L. 30′ B. 10′ T.

Hilfs-Ansätze.

I. 10 A. 1200′ L. (6′ B. $3^1/_2$′ T.);	x A. 21000′ L. (6′ B. $3^1/_2$′ T.)?
II. x A. (21000′ L.) 6′ B. ($3^1/_2$′ T.);	y A. (21000′ L.) 30′ B. ($3^1/_2$′ T.)?
III. y A. (21000′ L. 30′ B.) $3^1/_2$′ T.;	z A. (21000′ L. 30′ B.) 10′ T.?

Aus diesen drei Ansätzen ergeben sich, wenn wir bedenken, daß um so mehr Arbeiter erforderlich sind, sowohl 1) je länger, als 2) je breiter und 3) je tiefer der Graben (Kanal) werden soll, daß also in allen drei Fällen ein gerades geometrisches Verhältniß Statt findet, die drei Proportionen:

$$10 \text{ A.} : 1200' \text{ L.} = x \text{ A.} : 21000' \text{ L.},$$
$$x \text{ A.} : 6' \text{ Br.} = y \text{ A.} : 30' \text{ Br.},$$
$$y \text{ A.} : 3^1/_2' \text{ T.} = z \text{ A.} : 10' \text{ T.},$$

woraus $10 \text{ A.} : (1200' \text{ L.} \times 6' \text{ Br.} \times 3^1/_2' \text{ T.}) =$
$= z \text{ A.} : (21000' \text{ L.} \times 30' \text{ Br.} \times 10' \text{ T.})$,

welche zusammengesetzte Proportion ebenso wie die bei den Aufgaben 1) und 2) erhaltenen zu lesen ist.

Wir haben in dieser Aufgabe 3) bisher die Zeitverhältnisse beiderseits als die gleichen angenommen; das wollen wir nun ändern und die Aufgabe so stellen:

4) 10 Arbeiter haben in 5 Wochen bei täglich 10stündiger Arbeit einen Graben von 1200′ L., 6′ Br. und $3^1/_2$′ T., d. h. irgend eine Anzahl a_1 Kubikfuß Erde ausgehoben: wie viele Arbeiter werden erforderlich sein, um in 6 Wochen bei täglich 12 stündiger Arbeit einen Kanal von 21000′ L., 30′ Br., 10′ T. zu graben, d. h. eine andere verhältnißmäßige Anzahl a_2 Kubikfuß Erde auszuheben?

Auflösung. Gemäß der Lösung, welche die gleiche Aufgabe in 2) bereits gefunden hat, gilt:

$$(10\,\text{A.} \times 5\,\text{W.} \times 10\,\text{St.}) : a_1{}^{c'} =$$
$$= (z\,\text{A.} \times 6\,\text{W.} \times 12\,\text{St.}) : a_2{}^{c'};$$

aber

$$a_1{}^{c'} : (1200'\,\text{L.} \times 6'\,\text{B.} \times 3^1/_2'\,\text{T.}) =$$
$$= a_2{}^{c'} : (21000'\,\text{L.} \times 30'\,\text{B.} \times 10'\,\text{T.}).\ ^*)$$

Setzen wir beide Proportionen zusammen, so erhalten wir, weil a_1 gegen a_1 und a_2 gegen a_2 sich aufhebt:

$$(10\,\text{A.} \times 5\,\text{W.} \times 10\,\text{St.}) : (1200'\,\text{L.} \times 6'\,\text{Br.} \times 3^1/_2'\,\text{T.}) =$$
$$= (z\,\text{A.} \times 6\,\text{W.} \times 12\,\text{St.}) : (21000'\,\text{L.} \times 30'\,\text{Br.} \times 10'\,\text{T.}).$$

Bezeichnet man nun die einen der je in ein Produkt zusammengehörigen Größen als die zusammen bestimmenden, die andern als die zusammen bestimmten, wobei es gar nicht darauf ankommt, welche so oder so bezeichnet werden, **) so sagt die zuletzt zusammengesetzte Proportion:

„Das Produkt aus den zusammen bestimmenden Größen steht im geraden geometrischen Verhältnisse mit dem Produkte aus den zusammen bestimmten."

---

*) Da die Anzahl der Kubikfuß Erde offenbar um so größer ist, je größer 1) die Länge, 2) die Breite und 3) die Tiefe, und zwar so, daß bei der gleichen Breite und Tiefe a doppelt so groß, wenn die Länge, oder bei gleicher Länge und Tiefe a doppelt so groß, wenn die Breite doppelt so groß u. s. w., so findet obige Proportion Statt nach dem Satze: die abhängige Größe steht im geraden geometrischen Verhältnisse mit dem Produkte der zusammen bestimmenden Größen.

**) In der Aufgabe 2) waren Arbeiter, Zeit und Stunden der täglichen Arbeit die zusammen bestimmenden Größen, in 3) aber waren es Länge, Breite und Tiefe.

Ehe wir diesen Satz, vermittelst dessen wir jede zusammengesetzte Aufgabe durch eine einzige Proportion, deren Glieder Produkte sind, darstellen können, in den folgenden Aufgaben neben der bisherigen Art der Lösung zur Anwendung bringen, wobei die Uebereinstimmung der beiderseitigen Resultate uns noch mehr von der Richtigkeit desselben überzeugen wird — müssen wir die Kennzeichen angeben, an denen sich in jeder beliebigen Aufgabe, die je zusammen bestimmenden oder bestimmten Größen erkennen lassen. Wir gehen hiebei natürlich eben von den Beispielen aus, die uns erst auf diese Unterscheidungen geführt haben:

1) In der Aufgabe 1) erscheinen Zeit und Kapital als zusammen bestimmende Größen; aber Kapital und Zeit stehen, wie wir in §. 87. Aufgabe 4) gesehen, unter sich im verkehrten geometrischen Verhältnisse;
2) in der Aufgabe 2) sind es Arbeiter, Zahl der Arbeitstage und der Stunden täglicher Arbeit, welche als zusammen bestimmende Größen gelten; aber je mehr Arbeiter, in desto kürzerer Zeit werden sie mit einer Arbeit fertig, oder je länger täglich gearbeitet wird, desto weniger Arbeiter sind erforderlich, kurz auch diese Größen stehen, wie man sieht, im verkehrten geometrischen Verhältnisse;
3) dasselbe ist denn auch mit der Länge, Breite und Tiefe eines Grabens der Fall, welche in Aufgabe 3) die zusammen bestimmenden Größen vorstellen: je länger der Graben, desto weniger breit kann man ihn bei gleichem Aufwande von Arbeitskräften machen, oder je weniger tief man ihn zu machen hat, um so leichter stellt man eine größere Strecke her u. s. w.

Durchweg also sind die zusammen bestimmenden oder bestimmten je solche Größen, welche unter sich im verkehrten geometrischen Verhältnisse stehen, woran denn beim Ansatze von zusammen gesetzten Aufgaben in Einer Proportion sich genau zu halten ist.

5) Ein Hausgesinde, bestehend aus 12 Dienstboten, verzehrt bei einem Getreidpreise von 9 fl. 45 kr. das Schäffel, in einer Woche um 4 fl. 10 kr. Brod: in wie vielen Wochen werden 5 Dienstboten um 6 fl. 40 kr. Brod verbrauchen, wenn das Schäffel auf 21 fl. 36 kr. steht?

Auflösung A.

Allgemeiner Ansatz.

Angabe.	Frage.
12 D. 1 W. $9^3/_4$ fl. G.-P. $4^1/_6$ fl.;	5 D. ? W. $21^3/_5$ fl. G.-P. $6^2/_3$ fl.?

Hilfs-Ansätze.

I. { Angabe: 12 D. 1 W. ($9^3/_4$ fl. G.-P. $4^1/_6$ fl.);
Frage: 5 D. x W. ($9^3/_4$ fl. G.-P. $4^1/_6$ fl.)?

II. { Angabe: (5 D.) x W. $9^3/_4$ fl. G.-P. ($4^1/_6$ fl.);
Frage: (5 D.) y W. $21^3/_5$ fl. G.-P. ($4^1/_6$ fl.)?

III. { Angabe: (5 D.) y W. ($21^3/_4$ fl. G.-P.) $4^1/_6$ fl.;
Frage: (5 D.) z W. ($21^3/_5$ fl. G.-P.) $6^2/_3$ fl.?

Der erste Ansatz sagt: 12 Dienstboten verzehren in einer Woche bei irgend einem Getreid-Preise um irgend eine Summe Brod; wie lange reichen 5 D. bei demselben G.-P. mit derselben Summe? Je mehr Leute an einem gewissen Quantum zehren, desto weniger lange reichen sie damit: es besteht also zwischen der Zahl der Verzehrenden und der Zahl der Wochen, welche sie reichen, ein verkehrtes geometrisches Verhältniß, und wir haben:

I. 12 D. : 1 W. = 5 D. : x W.

Der zweite Ansatz heißt: eine gewisse Anzahl Dienstboten braucht bei einem Getreid-Preise von $9^3/_4$ fl. in x Wochen um eine gewisse Summe Brod; in wie viel Wochen werden dieselben Dienstboten bei einem G.-P. von $21^3/_5$ fl. um die gleiche Summe Brod verzehren? Je höher der Getreid-Preis steht, ein desto geringeres Quantum Brod (Mehl) erhält man um dieselbe Summe, um so kürzere Zeit reicht man also auch mit dem um dieselbe Summe erhaltenen Quantum: es besteht demnach zwischen dem G.-P. und zwischen der Zeit, während welcher man mit dem um dieselbe Summe erhaltenen Quantum Brod reicht, abermals ein verkehrtes geometrisches Verhältniß. Wir haben sonach:

II. x W. × $9^3/_4$ fl. G.-P. = y W. × $21^3/_5$ fl. G.-P.

Der dritte Ansatz endlich sagt aus: Eine gewisse Anzahl Dienstboten braucht bei irgend einem Getreid-Preise in y Wochen um $4^1/_6$ fl. Brod; in wie vielen Wochen werden dieselben Dienstboten bei demselben G.-P. um $6^2/_3$ fl. Brod brauchen? Je mehr Wochen, um desto mehr fl. Brod — mithin ein gerades geometrisches Verhältniß, und somit:

III. y W. : $4^1/_6$ fl. = z W. : $6^2/_3$ fl.

Aus I. erhalten wir die Zahlen-Proportion

$$5 : 12 = 1 : x,$$

aus II. $21\frac{3}{5} : 9\frac{3}{4} = x : y,$

aus III. $4\frac{1}{6} : 6\frac{2}{3} = y : z,$

---

mithin $\left(5 \times 21\frac{3}{5} \times 4\frac{1}{6}\right) : \left(12 \times 9\frac{3}{4} \times 6\frac{2}{3}\right) = 1 : z,$

$$\left(5 \times \frac{108}{5} \times \frac{25}{6}\right) : \left(12 \times \frac{39}{4} \times \frac{20}{3}\right) = 1 : z,$$

$$(108 \times 50) : (12 \times 39 \times 20) = 1 : z,$$

$$(9 \times 5) : (39 \,.\, 2) = 1 : z,$$

$$(3 \times 5) : (13 \,.\, 2) = 1 : z;$$

woraus $15\,z = 26,$

$$z = \frac{26}{15}.$$

Mithin z W. $= 1\frac{11}{15}$ W.

Auflösung B.

Wenn wir diese zusammengesetzte Aufgabe in Einer Proportion ansetzen wollen, müssen wir zuerst die zusammen bestimmenden wie bestimmten Größen unterscheiden. Dazu führt uns folgende Ueberlegung: Es wird um so mehr Geld für Brod ausgegeben, 1) je mehr Personen davon, 2) je länger sie zehren, 3) je theurer das Brod ist, also je höher der Getreidpreis steht: die Verbrauchs-Summe steht demnach mit diesen drei Größen im geraden Verhältniße und gehört also mit keiner von ihnen zusammen. Wohl aber gehören diese unter sich zusammen, denn sie stehen gegenseitig im verkehrten Verhältniße: je mehr Personen, desto weniger lange reichen sie, je theurer das Brod, desto weniger Personen können sich um dasselbe Geld satt essen u. s. w. Wir haben also:

$$\left(12\,\text{D.} \times 1\,\text{W.} \times 9\tfrac{3}{4}\,\text{fl. G.-P.}\right) : 4\tfrac{1}{6}\,\text{fl.} =$$

$$= \left(5\,\text{D.} \times x\,\text{W.} \times 21\tfrac{3}{5}\,\text{fl. G.-P.}\right) : 6\tfrac{2}{3}\,\text{fl.},$$

woraus die Zahlen-Proportion:

$$\left(12 \times \frac{39}{4} \times 1\right) : \frac{25}{6} = 5 \times x \times \frac{108}{5} : \frac{20}{3},$$

$$\frac{39}{4} : \frac{25}{2} = 9x : 20,$$

$$13 : 50 = 3x : 20,$$

$$13 : 5 = 3x : 2,$$

$$\text{woraus } 15x = 26,$$

$$x = \frac{26}{15},$$

x Wochen $= 1\frac{11}{15}$ Wochen, wie oben.

6) 150 Mann haben in 38 Stunden eine Schanze aufgeworfen von 560′ Länge, 18′ mittlerer Breite und 12′ Höhe. Es soll nun eine zweite Schanze von 270 Mann aufgeworfen werden, welche 21′ mittlere Breite und 10′ Höhe haben soll; wie weit werden sie damit in $28\frac{1}{2}$ Stunden kommen, wenn außerdem vorausgesetzt wird, daß wegen Härte des Bodens ꝛc. bei dieser Schanze $3^{c'}$ gerade so viel Arbeit machen als $4^{c'}$ bei jener?

Auflösung A.

Allgemeiner Ansatz.

Angabe: 150 M. 38 St. 560′ L. 18′ Br. 12′ H. $4^{c'}$;

Frage: 270 M. $28\frac{1}{2}$ St. ? L. 21′ Br. 10′ H. $3^{c'}$?

Hilfs-Ansätze.

I. { Angabe: 150 M. (38 St.) 560′ L. (18′ Br. 12′ H. $4^{c'}$);
Frage: 270 M. (38 St.) x' L. (18′ Br. 12′ H. $4^{c'}$)?

II. { Angabe: (270 M.) 38 St. x' L. (18′ Br. 12′ H. $4^{c'}$);
Frage: (270 M.) $28\frac{1}{2}$ St. y' L. (18′ Br. 12′ H. $4^{c'}$)?

III. { Angabe: (270 M. $28\frac{1}{2}$ St.) y' L. 18′ Br. (12′ H. $4^{c'}$);
Frage: (270 M. $28\frac{1}{2}$ St.) z' L. 21′ Br. (12′ H. $4^{c'}$)?

IV. { Angabe: (270 M. $28\frac{1}{2}$ St.) z' L. (21′ Br.) 12′ H. ($4^{c'}$);
Frage: (270 M. $28\frac{1}{2}$ St.) u' L. (21′ Br.) 10′ H. ($4^{c'}$)?

V. { Angabe: (270 M. $28\frac{1}{2}$ St.) u' L. (21′ Br. 10′ H.) $4^{c'}$;
Frage: (270 M. $28\frac{1}{2}$ St.) v' L. (21′ Br. 10′ H.) $3^{c'}$?

Aus diesen Ansätzen geht hervor:

I. Je mehr Mann, desto länger wird die Schanze —
mithin: 150 M. : 560′ L. = 270 M. : x′ L.;

II. je mehr Stunden gearbeitet wird, desto weiter kommt man —
daher: 38 St. : x′ L. = 28½ St. : y′ L.;

III. je breiter, desto weniger lang —
daher: y′ L. × 18′ Br. = z′ L. × 21′ Br.;

IV. je höher, desto weniger lang —
also: z′ L. × 12′ H. = u′ L. × 10′ H.;

V. je mehr in derselben Zeit gefördert wird, desto länger —
mithin: u′ L. : 4$^{c'}$ = v′ L. : 3$^{c'}$.

Daraus erhält man folgende fünf Proportionen:

150 M. : 560′ L. = 270 M. : x′ L.,
38 St. : x′ L. = 28½ St. : y′ L.,
z′ L. : 18′ Br. = y′ L. : 21′ Br.,
u′ L. : 12′ H. = z′ L. : 10′ H.,
4$^{c'}$: u′ L. = 3$^{c'}$: v′ L.

Diese geben (150 M. × 38 St. × 4$^{c'}$) : (560′ L. × 18′ Br. × 12′ H.) =
= (270 M. × 28½ St. × 3$^{c'}$) : (v′ L. × 21′ Br. × 10′ H.),

oder die Zahlen-Proportion:

$$(150 \,.\, 38 \,.\, 4) : (560 \,.\, 18 \,.\, 12) = (270 \,.\, \frac{57}{2} \,.\, 3) : (21 \,.\, 10 \,.\, v),$$

$$(15 \,.\, 2 \,.\, 8) : (56 \,.\, 18 \,.\, 12) = (27 \,.\, 3 \,.\, 3) : 21\,v,$$

$$5 : (7 \,.\, 9 \,.\, 12) = (9 \,.\, 3) : 7v,$$

$$5 : (9 \,.\, 12) = (9 \,.\, 3) : v,$$

$$5\,v = 2916,$$

$$v = 583\tfrac{1}{5}.$$

Antwort: Sie kommen v′ = 583⅕′ weit.

Auflösung B.

In unserer Aufgabe stehen offenbar

a) Arbeiter, Zeit und das Quantum Erde, welches in einer gewissen Zeit aufgeworfen werden kann,

b) Länge, Breite und Höhe der Schanze

je unter sich im verkehrten geometrischen Verhältniße; wenn wir daher die erstern als die zusammen bestimmenden bezeichnen, sind die letztern die zusammen bestimmten, und wir erhalten sonach die Proportion:

(150 M. × 38 St. × 4$^{c'}$) : (560′ L. × 18′ Br. × 12′ H.) =
= (270 M. × 28½ St. × 3$^{c'}$) : (x′ L. × 21′ Br. × 10′ H.),

welche, wie ersichtlich, mit der oben durch Zusammensetzung erhaltenen vollkommen übereinstimmt und in dieser Uebereinstimmung einen weitern überzeugenden Beweis von der Richtigkeit des Satzes liefert, den wir als das Haupt-Resultat dieses §. hier noch einmal ausschreiben:

„In zusammengesetzten Aufgaben steht das Produkt aus den zusammen bestimmenden Größen im geraden geometrischen Verhältnisse mit dem Produkte aus den zusammen bestimmten."

§. 89.

Reduktions-Aufgaben.

Die geometrische Proportion dient auch dazu, Größen, die in irgend einer Maß-Einheit ausgedrückt sind, auf eine andere Maß-Einheit zu bringen, was man im Allgemeinen „reduziren" heißt, sei es nun, daß das Maß eines Landes in das eines andern, oder daß Maße desselben Landes, aber in verschiedenen Einheiten ausgedrückt, eines in das andere übergeführt werden. Der Umfang dieser Anwendung findet sich in den folgenden Nummern abgegränzt:

1. Reduktion im Allgemeinen.

Wenn eine Reduktion eines Maßes in ein anderes vorgenommen werden soll, muß natürlich das Verhältniß der beiderseitigen Maße bekannt sein; dieß kann auf doppelte Weise ermittelt werden:

a) es ist eine gewisse Zahl von Einheiten des einen Maßes einer gewissen Zahl von Einheiten des andern gleich gesetzt, oder
b) man weiß, wie viele Einheiten eines dritten Maßes jedes der beiden fraglichen Maße enthält.

Anmerkung. Der Fall, daß man weiß, wie viele Einheiten von den beiden gegebenen Maßen irgend ein drittes Maß enthält, fällt unmittelbar mit dem ersten zusammen. Wenn z. B. 1 geogr. Meile 0,999 bayerische, aber 4,594 englische Meilen enthält, so gilt natürlich: 0,999 bayerische Meilen = 4,594 englische Meilen, und man weiß also wie in a), wie viele Meilen des einen Landes gleich sind wie vielen des andern.

Beispiele.

a) Wie viele Litres (französisches Getränkmaß) machen 1000 Gallonen (englisches), wenn 33 Gallonen = 125 Litres?

Auflösung. Je mehr Gallonen, desto mehr Litres —

mithin: 33 G. : 125 L. = 1000 G. : x L.,

oder: 33 : 125 = 1000 : x,

woraus: $33x = 125000$,

$$x = 3787\frac{29}{33}.$$

$$x \text{ Litres} = 3787\frac{29}{33} \text{ Litres}.$$

b) Wie viele bayerische Schäffel machen 1000 Quarters (englisch), da 1 bayr. Sch. 2,2236 — 1 Q. 2,9078 Hektoliter hält?

Auflösung. Je mehr einer dritten Einheit ein fragliches Maß hält, je größer es also ist, um so weniger von diesem Maße sind nöthig, um ein bestimmtes Quantum auszumachen: es findet also, wenn ein und dasselbe Quantum auszumessen ist, zwischen der Menge der hiezu nöthigen Einheiten eines gewissen Maßes und zwischen der Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten eines dritten Maßes dasselbe enthält, ein verkehrtes geometrisches Verhältniß Statt.

Mithin haben wir:

1000 Q. × 2,9078 H. = x b. Sch. × 2,2236 H.,

woraus die Proportion:

2,2236 : 2,9078 = 1000 : x;

22236 x = 29078000,

x = 1307,7.

So viele bayr. Schäffel also sind = 1000 Quarters.

Auch dieser zweite Fall läßt sich auf den ersten bringen und es ist passend, dieses zu thun, damit man eine einzige und zwar durch ein gerades Verhältniß ausdrückbare Form der Reduktion gewinne. Es ist nemlich in unserm Beispiele:

1 Q. = 2,9078 H.,

1 b. Sch. = 2,2236 H.,

mithin: 1 Q. : 1 b. Sch. = 2,9078 : 2,2236,

woraus: 2,2236 Q. = 2,9078 b. Sch., und daher nach a):

2,2236 Q. : 2,9078 Sch. = 1000 Q. : x Sch.,

oder die Zahlen-Proportion:

2,2236 : 2,9078 = 1000 : x,

welche mit der nach b) gefundenen völlig übereinstimmt.

Hieraus entnehmen wir denn die Regel, daß man in allen Fällen, das Verhältniß zwischen den beiderseitigen Maßen mag gegeben sein, wie es wolle, darnach frage, wie viele Einheiten des einen Maßes wie vielen des andern gleich seien, und hienach sodann die einfache Proportion aus dem gegebenen geraden Verhältnisse ansetze.

Hieher gehören denn auch die Reduktionen von einer Einheit eines und desselben Maßes auf eine andere, z. B. von fl. auf kr. bei einem und demselben Münz-, von ℔ auf Ztr. bei einem und demselben Gewichtsmaße, u. dgl., z. B.:

Wie viele fl. machen 288 kr., da 1 fl. = 60 kr.?

Je mehr fl., desto mehr kr., mithin:

$$1 \text{ fl.} : 60 \text{ kr.} = x \text{ fl.} : 288 \text{ kr.},$$

$$1 : 60 = x : 288,$$

$$60x = 288,$$

$$x = 4\frac{48}{60} = 4\frac{4}{5} \text{ fl.}$$

Oder: Wie viele Conventionsthaler machen 120 preußische Thaler, da der erstere 2 fl. 24 kr., der letztere 1 fl. 45 kr. gilt?

Auflösung. Es ist 1 C.-Th. $= 2\frac{2}{5}$ fl.,

$$1 \text{ pr. Th.} = 1\frac{3}{4} \text{ fl.},$$

$$1 \text{ C.-Th.} : 1 \text{ pr. Th.} = 2\frac{2}{5} : 1\frac{3}{4},$$

$$\frac{7}{4} \text{ C.-Th.} = \frac{12}{5} \text{ pr. Th.},$$

mithin nach a):

$$\frac{12}{5} \text{ pr. Th.} : \frac{7}{4} \text{ C.-Th.} = 120 \text{ pr. Th.} : x \text{ C.-Th.},$$

$$\frac{12}{5} : \frac{7}{4} = 120 : x,$$

$$4 : 35 = 10 : x,$$

$$4x = 350,$$

$$x = 87\frac{1}{2}.$$

Mithin sind $87\frac{1}{2}$ C.-Th. $= 120$ pr. Th.

2. Tara-Rechnung.

Bei den Reduktionen ist auch die vom sogenannten Brutto- auf das Netto-Gewicht namentlich zu erwähnen. Es ist hier nicht von dem Falle die Rede, wo das Gewicht der Kisten, Säcke, kurz die Emballage für sich bestimmt und durch dessen Subtraktion von dem Gesammt- (Brutto-) Gewicht das bloße (Netto-) Gewicht der Waare gefunden wird, sondern von dem Falle, wo eben das Herausnehmen der Waaren aus der Verpackung unstatthaft und so die reine Bestimmung des Nettogewichtes unmöglich ist. In diesem Falle nemlich wird die Waare nach dem Bruttogewicht, wie nicht anders möglich, verkauft; um aber den Käufer, der dabei die Emballage ebenso wie die Waare bezahlen muß, hiefür, wie billig, zu entschädigen, gibt der Verkäufer entweder

a) auf den Zentner Brutto einige Pfunde auf, was dann Tara auf den Zentner heißt, oder

b) er läßt sich's gefallen, daß der Käufer von jedem Zentner einige Pfunde wegrechnet (Tara vom Zentner). Z. B.

a) Wie viele ℔ Netto machen 7 Ztr. 80 ℔ Brutto, wenn 4 ℔ Tara auf den Zentner gegeben werden?

Auflösung. Die Aufgabe heißt eigentlich so: 104 ℔ Brutto = 100 ℔ Netto; wie viele ℔ Netto machen 780 ℔ Brutto? Das Verhältniß ist offenbar ein gerades, wir haben daher:

$$104 \text{ ℔ B.} : 100 \text{ ℔ N.} = 780 \text{ ℔ Br.} : x \text{ ℔ N.},$$
$$104 : 100 = 780 : x,$$
$$26 : 25 = 780 : x,$$
$$1 : 25 = 30 : x,$$
$$x = 750,$$
$$x \text{ ℔} = 750 \text{ ℔} = 7 \text{ Ztr. } 50 \text{ ℔ Netto.}$$

b) Wie viele ℔ Netto machen 70 ℔ Brutto, wenn 7 ℔ Tara vom Zentner gerechnet werden, d. h. wenn 100 ℔ Brutto = 93 ℔ Netto?

Auflösung.

$$100 \text{ ℔ Br.} : 93 \text{ ℔ N.} = 70 \text{ ℔ Br.} : x \text{ ℔ N.},$$
$$100 : 93 = 70 : x,$$
$$10 : 93 = 7 : x,$$
$$10x = 651,$$
$$x = 65\,^1/_{10}.$$

Also $65\,^1/_{10}$ ℔ Netto.

3. Reduktion durch Zusammensetzung von Proportionen.

Die häufigste Anwendung finden die Reduktionen in den Proportions-Aufgaben, in welchen je die Einzelwerthe derselben Größe in verschiedenen Maßen oder in verschiedenen Einheiten desselben Maßes ausgedrückt sind. Hiebei müssen nemlich immer die Einheiten der Angabe in die der Frage verwandelt werden, welche Verwandlung entweder in einzelnen Reduktions-Ansätzen geschieht oder aber, wie in den folgenden Beispielen, vermittelst zusammengesetzter Proportionen in unmittelbarer Verknüpfung mit der Hauptrechnung bewerkstelligt wird. Z. B.

1) 2 Ztr. 10 ℔ Hamburger Gewicht Zucker kosten 74 Mark Banko; wie viele fl. kostet der bayr. Zentner? Es hat aber ein Hamburger Zentner 48,42, ein bayerischer 56 Kilogramm, während auf eine feine Mark $27^3/_4$ Stück Mark Banko, hingegen $24^1/_2$ fl. bayr. gehen.

Auflösung. Um wieder das zunächst brauchbare Reduktions-Verhältniß aus diesen Angaben zu bestimmen, setzen wir:

a) 1 Ztr. H. = 48,42 K.,
1 Ztr. b. = 56 K.,

1 Ztr. H. : 1 Ztr. b. = 48,42 : 56,
woraus 56 Ztr. H. = 48,42 Ztr. b.,
oder 28 Ztr. H. = 24,21 Ztr. b.

b) 1 f. M. = $27^3/_4$ M. B.,
1 f. M. = $24^1/_2$ fl.,

$27^3/_4$ M. B. = $24^1/_2$ fl.

Allgemeiner Ansatz.

Angabe.	Frage.
$2^1/_{10}$ Ztr. H. 74 M. B.;	1 Ztr. b. ? fl. ?

Hilfs-Ansätze.

I. $2^1/_{10}$ Ztr. H. 74 M. B.;	28 Ztr. H. x M. B.?
II. 24,21 Ztr. b. x M. B.;	1 Ztr. b. y M. B.?
III. $27^3/_4$ M. B. = $24^1/_2$ fl.;	y M. B. = z fl.?

Zu diesen Hilfs-Ansätzen bemerken wir Folgendes:

1) Die erste Angabe muß natürlich die nämliche mit der allgemeinen sein; weil nun diese ihre Größen in H. Ztr. und M. B. ausgedrückt hat, so kann auch die Frage keine andern Einheiten enthalten, es muß also auch um H. Ztr. gefragt werden, jedoch um eine solche Zahl (28), daß dieselbe

2) einer gewissen Anzahl (24,21) bayr. Ztr. gleich sei, und nun

die erste Frage mit der Substituirung von 24,21 b. Ztr. statt 28 H. Ztr. zur Angabe des zweiten Ansatzes gemacht werden könne, dessen Frageglieder sich nun aus der Aufgabe von selbst ergeben.

3) Mit dem zweiten Ansatz wäre man am Ende, wenn um M. B. und nicht um fl. gefragt wäre; so aber müssen die y M. B. noch in z fl. reduzirt werden, und dieß geschieht durch den dritten Ansatz.

Die drei Ansätze geben folgende Proportionen:

$$2\frac{1}{10}\text{ Ztr. H. : 74 M. B. = 28 Ztr. H. : x M. B.,}$$

$$24{,}21\text{ Ztr. b. : x M. B. = 1 Ztr. b. : y M. B.,}$$

$$27\frac{3}{4}\text{ M. B. : }24\frac{1}{2}\text{ fl. = y M. B. : z fl.,}$$

oder die Zahlen-Proportionen:

$$\frac{21}{10} : 74 = 28 : x,$$

$$\frac{2421}{100} : x = 1 : y,$$

$$\frac{111}{4} : \frac{49}{2} = y : z,$$

$$\left(\frac{21}{10} \cdot \frac{2421}{100} : \frac{111}{4}\right) : \left(74 \cdot \frac{49}{2}\right) = 28 : z,$$

$$(21 \cdot 2421 \cdot 3) : 49 = 112000 : z,$$

$$(2421 \cdot 9) : 7 = 112000 : z,$$

$$21789\,z = 784000,$$

$$z = 35{,}98\ldots$$

Antwort: Der bayerische Zentner kostet nahezu 36 fl.

2) 3 Loth kosten 4 kr.; was (? fl.) 6 Zentner?

Allgemeiner Ansatz.

Angabe.	Frage.
3 Lth. 4 kr.;	6 Ztr. ? fl.?

Hilfs-Ansätze.

I.	3 Lth. 4 kr.;	32 Lth. x kr.?
II.	1 ℔ x kr.;	100 ℔ y kr.?
III.	1 Ztr. y kr.;	6 Ztr. z kr.?
IV.	60 kr. = 1 fl.;	z kr. = v fl.?

Hieraus ergeben sich die Proportionen:

$$3\ \text{Lth.} : 4\ \text{kr.} = 32\ \text{Lth.} : x\ \text{kr.},$$
$$1\ \text{℔} : x\ \text{kr.} = 100\ \text{℔} : y\ \text{kr.},$$
$$1\ \text{Ztr.} : y\ \text{kr.} = 6\ \text{Ztr.} : z\ \text{kr.},$$
$$60\ \text{kr.} : 1\ \text{fl.} = z\ \text{kr.} : v\ \text{fl.},$$

oder

$$3 : 4 = 32 : x,$$
$$1 : x = 100 : y,$$
$$1 : y = 6 : z,$$
$$60 : 1 = z : v,$$

mithin

$$(3 . 60) : 4 = (32 . 100 . 6) : v,$$
$$3 : 4 = 320 : v,$$
$$3v = 320 . 4 = 1280,$$
$$v = 426^2/_3.$$

Die 6 Zentner kosten $426^2/_3$ fl.

§. 90.

Reesischer Ansatz.*)

A. Bei der einfachen Proportion.

Bezeichnen wir die bestimmende Größe der Angabe mit a, die davon bestimmte mit f(a) — was Funktion von a heißt und die Abhängigkeit dieser Größe von a anzeigt —, hinwieder aber die bestimmende Größe der Frage mit b, die davon bestimmte, d. i. die unbekannte mit f(b), so haben wir die allgemeine Proportion:

$$a : f(a) = b : f(b),$$

welche wir auch in eine Gleichung zwischen zwei Produkten verwandeln können, nemlich in:

$$f(b) \times a = b \times f(a).$$

Schreibt man nun diese Gleichung so an, daß man das Gleichheitszeichen durch einen vertikalen Strich ersetzt und zugleich die Multiplikation dadurch anzeigt, daß man die Faktoren unter einander schreibt, so entsteht der **Reesische Ansatz**, nemlich:

*) Es handelt sich hier vornehmlich darum, den Reesischen Ansatz, dessen Kenntniß aus dem Elementar-Unterrichte schon vorausgesetzt werden darf, und die Rechnung damit, auch als **mathematisch richtig** zu begründen.

f(b) | b
a | f(a)

welchen Ansatz man liest, indem man zuerst [mit f(b) und b] die Frageſtellung macht und an dieſe mit „wenn“ die Angabe [a und f(a)] reiht.

Umgekehrt, wenn der Ansatz gemacht werden ſoll, beginnt man links mit dem unbekannten Gliede f(b), welches natürlich das dazu gehörige bekannte, das ſogenannte Frageglied b und zwar als Faktor des gegentheiligen Produktes auf der andern Seite des Gleichheitszeichen alſo rechts des Striches nach ſich zieht; daß nun die Angabe links mit a begonnen wird, hat, weil a und b als homologe Glieder immer gleichnamig ſind, ſeinen Ausdruck in der bekannten Regel gefunden:

„Man laſſe der Frage die Angabe folgen und beginne damit ebenfalls links mit dem Gliede, welches dem Frageglied gleichnamig iſt,“

worauf das allein noch übrige Glied [f(a)] natürlich rechts ſeine Stelle findet.

Auf der Grundbedingung des Reeſiſchen Anſatzes, daß nemlich das Produkt der Zahlen rechts (der innern Glieder) = dem Produkte der Zahlen links des Striches (der äußern Glieder), beruhen auch die Regeln, welche für die Rechnung mit demſelben gelten, nemlich:

1) „Man findet das unbekannte Glied, indem man die Glieder der rechten Seite mit einander multiplizirt und dieß Produkt durch das bekannte Glied der linken Seite dividirt“ — entſprechend der Gleichung:

$$f(b) = \frac{b\,f(a)}{a}.$$

2) „Man darf je eine Zahl der einen Seite und eine der andern [d. i. je ein äußeres und ein inneres Glied ſ. §. 84. 2)] ſowohl mit derſelben Zahl multipliziren, als durch dieſelbe dividiren, was einerſeits beim Wegſchaffen der Brüche, andrerſeits beim Verkleinern der gegenſeitigen Zahlen in Anwendung kommt.“

Z. B. $15^3/_4$ Ellen kosten 7 fl. 35 kr.; was kosten $40^1/_2$ Ellen?

fl. x	$40\frac{1}{2}$ E.
E. $15\frac{3}{4}$	$7\frac{7}{12}$ fl.

2	81
63	4
12	91

7	9
3	3
2	13

2 x	39

$$x = \frac{39}{2} = 19^1/_2 \text{ fl.}$$

B. Bei der zusammengesetzten Proportion.

Bei zusammengesetzten Proportionen ist die Uebertragung in den Reesischen Ansatz eben so gut möglich, nur muß man bemerken, daß es die aus den Produkten der zusammengehörigen Größen gebildete Eine Proportion ist, an die man sich dabei zu halten hat. Bezeichnet man nemlich das Produkt der zusammen bestimmenden Größen der Angabe mit A, der Frage mit B, die Produkte der zusammen bestimmten Größen aber entsprechend mit f(A) und f(B), so haben wir nach §. 88. die Proportion:

$$A : f(A) = B : f(B),$$

und hieraus die Gleichung:

$$f(B) \times A = B \times f(A),$$

und diese gibt den Reesischen Ansatz:

f(B)	B
A	f(A)

f(B)	$\frac{B \times f(A)}{f(B)}$,

wobei für den Ansatz alles das gilt, was oben für den einfachen Reesischen Ansatz gesagt worden, und zudem nur noch die Bemerkung beigefügt wird, daß auch in den Produkten der zusammengehörigen Größen die Multiplikation durch bloßes Untereinanderschreiben der Faktoren angezeigt wird.

Z. B. Mit 5 Paar Pferden wird bei täglich 8stündiger Arbeit ein Grund von 1000° Länge und 200° Breite in 30 Tagen umgeackert; wie lange hat man bei täglich 10stündiger Arbeit mit 7 Paar Ochsen an einem Grundstücke zu pflügen, welches 720° lang und 350° breit ist, wenn man außerdem rechnet, daß man mit 2 Paar Pferden so weit kommt als mit 3 Paar Ochsen?

Auflösung. Die je zusammen gehörigen Größen sind:

a) einerseits 1) die Anzahl der pflügenden Paare, 2) die Zeit, welche sie brauchen, 3) die Zahl der Stunden täglicher Arbeit;
b) andrerseits 1) die Länge, 2) die Breite des Grundstückes und 3) die Anzahl der Paare, mit welchen je das Gleiche geleistet wird (mit den Pferden, von denen wenigere Paare so viel leisten als mehrere der Ochsen, wird man weiter kommen als mit diesen, d. h. in gleicher Zeit ein größeres Grundstück umackern können, mit den Ochsen aber ein kleineres).

Wir haben also:

$$A = 1000° \text{ L.} \times 200° \text{ Br.} \times 2 \text{ P. Pf.},$$
$$f(A) = 5 \text{ P. Pf.} \times 30 \text{ T.} \times 8 \text{ St.},$$
$$B = 720° \text{ L.} \times 350° \text{ Br.} \times 3 \text{ P. O.},$$
$$f(B) = 7 \text{ P. O.} \times x \text{ T.} \times 10 \text{ St.}$$

Mithin ist der Reesische Ansatz:

T. x	720° L.
St. 10	350° Br.
P. O. 7	3 P. O.
L. 1000°	5 P. Pf.
Br. 200°	8 St.
P. Pf. 2	30 T.

: 4	50
200	18
5	

7 × x	3
5	3
	18

5x	162

$$x = 32^2/_5.$$

Antw.: In $32^2/_5$ T. = 32 T. 4 St. (den Tag zu 10 St. gerechnet).

C. In Reduktions-Aufgaben.

Wenn man die zusammengesetzten Proportionen des vorigen §. 89 näher untersucht, so bemerkt man leicht:

1) daß jede der vorkommenden Einheiten je zweimal und zwar
2) einmal in einem äußern, das andere Mal in einem innern Gliede vorkömmt, und
3) daß hiebei die Hilfsgrößen ganz außer Acht bleiben.

Setzt man nun dieß benützend einen Reesischen Ansatz in der Art an, daß man mit dem unbekannten Gliede (einem äußern) links beginnt, worauf rechts das Frageglied (ein inneres) folgt, so kömmt, wenn man mit dem gleichnamigen Gliede (einem äußern) links fortfährt, das diesem entsprechende*) (ein inneres) wieder rechts zu stehen u. s. w. Es werden also bei dieser Anordnung alle äußern Glieder aller einzelnen Proportionen links, alle innern rechts zu stehen kommen, und wird so auch dieser Ansatz die Gleichheit ausdrücken, welche zwischen dem Produkte aller innern und dem aller äußern Glieder der zusammengesetzten Proportion besteht. Aus diesem Grunde ist er auch tauglich, zur Berechnung der Unbekannten zu dienen.

So verwandeln sich die Proportionen der 1. Aufgabe in §. 89. 3) nemlich:

$$2^1/_{10} \text{ Ztr. H.} : 74 \text{ M. B.} = 28 \text{ Ztr. H.} : x \text{ M. B.},$$
$$24{,}21 \text{ Ztr. b.} : x \text{ M. B.} = 1 \text{ Ztr. b.} : y \text{ M. B.},$$
$$27^3/_4 \text{ M. B.} : 24^1/_2 \text{ fl.} = y \text{ M. B.} : z \text{ fl.},$$

in den Reesischen Ansatz:

---

*) Einander „entsprechend" heißen hier solche zwei Größen, mit welchen eine bestimmte Aussage (der Gleichheit oder Gleichgeltung) gemacht werden kann. So sind im folgenden Beispiele 24,21 Ztr. b. und 28 Ztr. H. einander entsprechende Größen, weil sie in dem Satze: „24,21 Ztr. b. = 28 Ztr. H." einander gleich gesetzt sind.

fl. x	1 Z. h.
h. Z. 24,21	28 Z. H.
H. Z. $2\frac{1}{10}$	74 M. B.
M. B. $27\frac{3}{4}$	$24\frac{1}{2}$ fl.

21	10
111	4
2	49
3	2
3	7

$3 \times 3 \times 24{,}21\,x \mid 28 \times 10 \times 4 \times 7$

$217{,}89\,x = 7840,$

$x = 35{,}98$ wie oben.

Der Reesische Ansatz, durch welchen die zweite Aufgabe desselben §. 89 gelöst wird, nemlich: „wenn 3 Loth 4 kr., was kosten 6 Zentner?“ ist folgender:

fl. x	6 Ztr.
Ztr. 1	100 ℔
℔ 1	32 Lth.
Lth. 3	4 kr.
kr. 60	1 fl.

3 x	1280
x	$426\frac{2}{3}$.

§. 91.

Theilung in proportionale Theile.

Eine letzte Anwendung findet die Lehre von den geometrischen Proportionen noch in der Theilung eines Ganzen in proportionale Theile, auch Repartitions- oder Gesellschafts-Rechnung genannt.

Hat nemlich das gleiche Verhältniß der bestimmenden zur bestimmten (abhängigen) Größe nicht bloß für zwei Fälle (in Einer Proportion) statt, sondern für mehrere zugleich, so entsteht, wenn keine der bestimmten Größen für sich, wohl aber deren Summe gegeben ist, die Aufgabe der Theilung dieser Summe in proportionale Theile, d. h. eben in jene unbekannten abhängigen Größen.

Der allgemeine Ausdruck mehrerer solcher gleichen Verhältnisse ist:

$$a_1 : x_1 = a_2 : x_2 = a_3 : x_3 = a_4 : x_4 \ldots,$$

wo $a_1, a_2, a_3 \ldots$ die gegebenen bestimmenden, $x_1, x_2, x_3 \ldots$ die dadurch bestimmten aber unbekannten Größen sind, von letztern jedoch die Summe gegeben ist.

Dieser letztere Umstand nun ist es, welcher (während jede Proportion, die aus je zwei Verhältnissen gebildet würde, wie z. B. $a_1 : x_1 = a_2 : x_2$, oder $a_1 : x_1 = a_3 : x_3$, statt nur Ein unbekanntes Glied zu haben deren zwei hätte) vermittelst des Satzes, den wir in §. 84 als Anwendung von 1. β) erhalten haben, die Bildung so vieler Proportionen mit je Einer Unbekannten ermöglicht als gleiche Verhältnisse gegeben sind.

Es ist nemlich gemäß diesem Satze:

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots) : (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ldots) &= a_1 : x_2, \\ &= a_2 : x_2, \\ &= a_3 : x_3 \ldots,\end{aligned}$$

$$\text{oder weil } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \ldots = S,$$

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots) : S &= a_1 : x_1, \\ &= a_2 : x_2, \\ &= a_3 : x_3 \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

Da nun $x_1, x_2, x_3 \ldots$ die Theile der gegebenen Zahl S, zugleich aber mit $a_1, a_2, a_3 \ldots$ proportional sind, so führt die Rechnung, durch welche diese Theile hergestellt werden, den Namen der Theilung in proportionale Theile. Die erhaltenen Proportionen aber lassen sich, wenn man die Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots$ die gegebenen Verhältnißzahlen (weil sie je mit den Theilen $x_1, x_2, x_3 \ldots$ im geraden Verhältnisse stehen), die Zahl S aber die zu theilende Summe nennt, in folgendem Satze lesen:

„Die Summe der Verhältnißzahlen verhält sich zu der zu theilenden Summe, wie jede einzelne Verhältnißzahl zu dem ihr entsprechenden Theile."

Bei der Anwendung dieses Satzes müssen zwei Fälle unterschieden werden:

a) die Größe der Theile ist nur je von einer einzigen,
b) sie ist je von mehrern bestimmenden Größen zugleich abhängig.

Wir geben hier von beiden Fällen je ein Beispiel:

a) Es waren 4 Personen zur Betreibung eines Geschäftes vereinigt, und zwar hatte A 5000 fl. zu den Kosten beigeschossen, B 3600 fl., C 7000 fl., D 4500 fl. Nun ist das Geschäft beendigt, und es hat sich nach Abzug der Kosten ein reiner Gewinn von 10050 fl. ergeben; wie viel trifft jeden der Theilhaber hievon?

Auflösung. Offenbar haben diese vier Personen den Gewinn nicht zu gleichen Theilen zu theilen, sondern je mehr eine dazu aufgewendet (eingelegt) hat, auf einen um so größern Theil hat sie auch Anspruch, und zwar so, daß wenn etwa A 2-, 3mal so viel hergegeben hätte als B, auch dem A von dem Gewinne 2-, 3mal so viel gebührte als dem B: es besteht also je zwischen einer Einlage und dem dafür treffenden Gewinns-Antheile ein gerades geometrisches Verhältniß.

Bezeichnen wir nun diese Gewinns-Antheile (Gewimste) nacheinander mit x_1, x_2, x_3, x_4, so haben wir:

$$5000 : x_1 = 3600 : x_2 = 7000 : x_3 = 4500 : x_4,$$

und daher nach obigem Satze die Einzel-Proportionen:

I. $(5000+3600+7000+4500) : (x_1+x_2+x_3+x_4) = 5000 : x_1,$

oder $20100 : 10050 = 5000 : x_1,$

$2 : 1 = 5000 : x_1,$

woraus $x_1 = 2500;$

II. $2 : 1 = 3600 : x_2,$

$x_2 = 1800;$

III. $2 : 1 = 7000 : x_3,$

$x_3 = 3500;$

IV. $2 : 1 = 4500 : x_4,$

$x_4 = 2250.$

Es ist aber sowohl 1) $\left\{\begin{matrix}2500\\1800\\3500\\2250\end{matrix}\right. = 10050$, d. i. = der zu theilenden Summe, als auch

2) $5000 : 2500 = 3600 : 1800 = 7000 : 3500 = 4500 : 2250 (= 2 : 1)$,

und somit durch diese Lösung den beiden Grundbedingungen der Aufgabe Genüge geleistet.

b) Sind der die Größe je eines Theiles bestimmenden Größen mehrere, so gilt, wie in allen solchen Fällen nach §. 88:

„Das Produkt aus den zusammenbestimmenden Größen steht im geraden geometrischen Verhältnisse mit der dadurch bestimmten Größe,"

nach welchem Satze denn die sogenannten Verhältnißzahlen der Theilung als die Produkte der je zusammen bestimmenden Größen sich herausstellen.

Z. B. 4 Bauern haben Fuhren gemacht:

A mit 3 Pferden 8 Tage lang,
B „ 2 „ 6 „ „
C „ 4 „ 5 „ „
D „ 5 „ 9 „ „. Es wurde hiefür eine Aversal-Summe von 134 fl. 40 kr. bezahlt; wie viel hat Jeder davon zu beanspruchen?

Auflösung. Mit je mehr Pferden Einer und je länger er Fuhren macht, desto mehr kann er ab- oder zuführen, desto mehr verdient er also auch; Anzahl der Pferde und Zahl der Tage stellen sich aber noch bestimmter als zusammen bestimmende Größen heraus, wenn man erwägt, daß ein gewisses Quantum in um so kürzerer Zeit geführt werde mit je mehr Pferden man die Fuhren macht, daß also diese beiden Größen unter sich im verkehrten geometrischen Verhältnisse stehen. Wir haben sonach:

$$(3\,\text{Pf.} \times 8\,\text{T.}) : x_1\,\text{fl.} = (2\,\text{Pf.} \times 6\,\text{T.}) : x_2\,\text{fl.} =$$
$$= (4\,\text{Pf.} \times 5\,\text{T.}) : x_3\,\text{fl.} = (5\,\text{Pf.} \times 9\,\text{T.}) : x_4\,\text{fl.},$$

oder die Zahlen-Verhältnisse:

$$(3 \times 8) : x_1 = (2 \times 6) : x_2 = (4 \times 5) : x_3 = (5 \times 9) : x_4,$$
$$24 : x_1 = 12 : x_2 = 20 : x_3 = 45 : x_4,$$

woraus, da $24 + 12 + 20 + 45 = 101$ und $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 134\frac{2}{3}$, die Einzelproportionen:

$$\text{I.}\quad 101 : 134\tfrac{2}{3} = 24 : x_1,$$
$$101 : \frac{404}{3} = 24 : x_1,$$
$$3 : 4 = 24 : x_1,$$
$$1 : 4 = 8 : x_1,$$
$$\text{und } x_1 = 32;$$

II. $3 : 4 = 12 : x_2$,

$x_2 = 16$;

III. $3 : 4 = 20 : x_3$,

$x_3 = \frac{80}{3} = 26\frac{2}{3}$;

IV. $3 : 4 = 45 : x_4$,

$x_4 = 60$.

Es erhält also A . . . 32 fl. — kr.,
B . . . 16 fl. — kr.,
C . . . 26 fl. 40 kr.,
D . . . 60 fl. — kr.,

zusammen . . . 134 fl. 40 kr.

Zweiter Abschnitt.

Gleichungen im engern Sinne.

§. 92.

Vorbegriffe.

Nachdem die Lehre von den Proportionen vollständig entwickelt und auch in ihren Anwendungen mit dem Vorhergehenden völlig erschöpft ist, kommen wir zur zweiten Art der algebraischen Gleichungen, nemlich zu denen, in welchen Resultate verschiedener Rechnungsarten einander gleichgestellt sind (s. §. 74).

Einen allgemeinen Ausdruck einer solchen Gleichung zu geben ist nicht möglich, weil es ihrer so viele verschiedene Arten gibt, als sich ungleichartige Resultate zu zweien combiniren lassen; bedenkt man aber überdieß, daß jeder Theil des einen wie des andern Resultates wieder für sich auf alle möglichen Arten zusammengesetzt sein kann, so muß man wohl auch von der Aufstellung mehrerer bestimmten Formen dieser Gleichungen gänzlich abstehen.

Setzt man nun aber doch irgend eine bestimmte derartige Gleichung, z. B. $ab = c - d$, so sagt sie im Allgemeinen nichts weiter, als daß ein Produkt einer Differenz gleich sein könne, im Besondern, daß dieses Produkt dieser Differenz auch wirklich gleich sei. Diese Gleichung ist nun zwar wahr, eben und allein durch

ihre Setzung, allein wie sie ist, ist sie für uns nicht als wahr erkennbar.*) Weil aber die Gleichung durch besondere Setzung wahr ist, so muß sie auch durch eben solche besondere Setzung als wahr erkennbar sein: so wird z. B. obige Gleichung, die durch ihre bloße Setzung schon wahr ist, auch als wahr erkennbar, wenn wir etwa $a = c$, und $b = 1 - \frac{d}{c}$ setzen. Thun wir nemlich das, so haben wir:

$$ab = c\left(1 - \frac{d}{c}\right) = c - \frac{cd}{c} = c - d,$$

und wir sehen also ein, daß mit diesen besondern Setzungen wirklich $ab = c - d$.

Allein die Gleichung ist durch Eine Setzung, nemlich durch ihre eigene, schon wahr, sie muß also auch ebenfalls durch Eine Setzung schon als wahr erkennbar sein: also nicht alle, auch nicht mehrere der in einer solchen Gleichung vorkommenden Zahlen müssen besondere Werthe haben, sondern nur Eine.

In unserer gegebenen Gleichung ist es bis jetzt ganz gleichgültig, welche von den Zahlen wir einen besondern Werth annehmen lassen, um die Gleichung als wahr erkennbar, kurz wahr zu machen, während die übrigen Zahlen ihre allgemeinen, unbestimmten Werthe beibehalten — wir können also eine jede hiezu bestimmen. Diejenige aber, welche einmal dazu bestimmt ist, wird, weil sie eben nicht mehr eine allgemeine, unbestimmte, sondern eine besondere, bestimmte, aber in dieser ihrer Bestimmtheit einstweilen noch nicht bekannte Zahl ist, die Unbekannte genannt und zum Unterschiede von den übrigen Zahlen mit einem der Endbuchstaben des Alphabets, als $x, y, z \ldots$ bezeichnet. So kann unsere gegebene Gleichung in folgende vier von einander verschiedene Gleichungen gedeutet werden:

$$1)\ x_1 b = c - d,$$
$$2)\ a x_2 = c - d,$$
$$3)\ ab = x_3 - d,$$
$$4)\ ab = c - x_4,$$

und in jedem andern Falle wird auch der besondere Werth der Unbekannten ein anderer sein.

---

*) Wäre sie an sich und nicht bloß durch besondere Setzung wahr, so wäre sie auch ohne Weiteres als wahr erkennbar.

Die Frage nach der Wahrheit der durch besondere Setzung existirenden Gleichung fällt also ganz mit der nach dem besondern Werthe zusammen, welchen die Unbekannte haben müße, damit die Gleichung als wahr erkennbar, d. i. nothwendig (allgemein) wahr sei. Nun erhält man offenbar irgend einen besondern Werth der Unbekannten aus der Gleichung, wenn man dieselbe gemäß dem Grundsatze „Gleiches auf gleiche Art verändert gibt Gleiches" nach und nach so ändert, daß die Unbekannte für sich allein die eine Seite der Gleichung, ein aus den übrigen (bekannten) Zahlen zusammengesetzter Ausdruck aber die andere bildet, wie man z. B. aus unserer Gleichung 1) durch $\frac{xb}{b} = \frac{c - d}{b}$ erhält: $x = \frac{c - d}{b}$. Dieser Ausdruck $\frac{c - d}{b}$ erscheint hier freilich zunächst bloß überhaupt als ein besonderer Werth von x, daß es aber in der That jener besondere Werth sei, den x haben müsse, damit die Gleichung allgemein wahr sei, geht aus folgender Erwägung hervor:

Die beiden Gleichungen „$xb = c - d$" und „$x = \frac{c - d}{b}$" sind, weil die letztere von der erstern r i c h t i g abgeleitet ist, durchaus beide zugleich wahr, d. h.: wenn wir die erste als wahr setzen, so ist eben damit auch die zweite wahr, und umgekehrt. Setzen wir also gemäß der zweiten Gleichung $x = \frac{c - d}{b}$, so muß mit dieser Setzung zugleich auch die erste Gleichung wahr sein, oder mit andern Worten: wenn wir in dieser ersten Gleichung statt x den Ausdruck $\frac{c - d}{b}$ setzen, so muß sie noch immer wahr sein, aber nun, weil sie keine Unbekannte mehr enthält, nicht mehr bloß durch besondere Setzung, sondern allgemein wahr und damit auch als wahr erkennbar. In der That erhalten wir:

$$\frac{c - d}{b} \cdot b = c - d,$$

$$\text{woraus } c - d = c - d,$$

eine Gleichung, welche als identische gewiß allgemein wahr ist.

Jener durch das angedeutete Verfahren aus der Gleichung erhaltene Ausdruck für x ist also nicht bloß überhaupt ein Werth von x, sondern weil die Gleichung eben nur bei diesem Werthe von x aus der willkührlichen Setzung in die nothwendige, oder aus der besondern Wahrheit in die allgemeine übergeht, d e r Werth der

Unbekannten für diese Gleichung; ihn aus derselben herstellen, heißt man „die Gleichung auflösen."

I.

Auflösung der Gleichungen.

§. 93.

Die Frage nach der Wahrheit, die auch diesen Gleichungen zukommen muß, hat uns dahin geführt, als die eigentliche Aufgabe bei denselben die Entwicklung des Werthes der Unbekannten zu erkennen. Dabei kommt es, wie wir bereits gesehen, bloß darauf an, die Unbekannte ohne alle weitere Verbindung als die eine Seite der Gleichung darzustellen. Weil dieselbe aber durch die verschiedensten Rechnungsarten und deren denkbare Combinationen mit den bekannten Zahlen der Gleichung verbunden sein kann, so ist es nothwendig, sichere Regeln aufzusuchen, nach welchen sie aus diesen Verbindungen gelöst werden könne. Wir setzen also die Unbekannte in den folgenden Gleichungen nach einander in die verschiedenen möglichen Verbindungen und sehen zu, wie selbe nach dem Grundsatze „Gleiches auf gleiche Art verändert gibt Gleiches" gelöst werden mögen.

1) $x + a = b - c$, oder $x - a = b - c$,

$(x + a) - a = (b - c) - a$, $(x - a) + a = (b - c) + a$,

$x = b - c - a$; $x = b - c + a$,

d. h. ein Glied einer Gleichung wird von der Seite, auf welcher es steht, hinweggeschafft, indem man es mit dem entgegengesetzten Zeichen auf die andere Seite setzt.

2) $mx + a = b - c$,

$$\frac{mx + a}{m} = \frac{b - c}{m},$$

$$x + \frac{a}{m} = \frac{b}{m} - \frac{c}{m};$$

es wird also ein Faktor von einem Gliede einer Gleichung hinweggeschafft, indem man alle Glieder der Gleichung durch denselben dividirt.

3) $\frac{x}{m} + a = b - c,$

$$\left(\frac{x}{m} + a\right) . m = (b - c) . m,$$

$$x + am = bm - cm,$$

daraus folgt: ein Divisor wird von einem Gliede einer Gleichung hinweggeschafft, indem man alle Glieder der Gleichung damit multiplizirt.

4) α) $x^m + a = b - c.$

Würde man hier, ähnlich wie bisher, setzen:

$$\sqrt[m]{x^m + a} = \sqrt[m]{b - c},$$

so erhielte man, wenn man auch die erste Wurzel nach dem binomischen Lehrsatze entwickelte, keineswegs x für sich allein; man muß daher a schon vor dem Radiziren von x^m hinwegschaffen, wobei man erhält:

$$x^m = b - c - a,$$

$$\text{und nun } \sqrt[m]{x^m} = \sqrt[m]{b - c - a},$$

$$\text{mithin } x = \sqrt[m]{b - c - a}.$$

β) $a^x - c = b,$

$$a^x = b + c,$$

$$x \,\lambda a = \lambda \underline{b + c},$$

$$x = \frac{\lambda \underline{b + c}}{\lambda a}.$$

5) α) $\sqrt[m]{x} + a = b - c,$

$$\sqrt[m]{x} = b - c - a,$$

$$\left(\sqrt[m]{x}\right)^m = (b - c - a)^m.$$

$$x = (b - c - a)^m.$$

β*) $\sqrt[x]{a} + b = c,$

$$\sqrt[x]{a} = c - b,$$

$$\frac{\lambda a}{x} = \lambda \underline{c - b},$$

$$\frac{\lambda a}{\lambda \underline{c - b}} = x.$$

---

*) Die verschiedenen Gleichungen unter β) heißen Exponential- oder logarithmische, auch transcendente Gleichungen, und werden in der Elementar-Mathematik nicht weiter in Betracht gezogen.

6) α) $\log_a(x+c=b$, β) $\log_x(a-c=b$,

$\log_a(x=b-c$, $\log_x(a=b+c$,

$x=a^{b-c}$. $a=x^{b+c}$,

$\sqrt[b+c]{a=x}$.

Aus 4, 5 und 6 folgt: Wenn die Unbekannte in einer Potenz, einer Wurzel oder einem Logarithmus vorkömmt, so müssen diese Funktionen zuerst allein gestellt und hierauf durch Anwendung der betreffenden Rechnungsarten auf beide Seiten der Gleichung die Zahl hinweggeschafft werden, welche die Unbekannte noch in irgend einer Eigenschaft begleitet, was in den Fällen, wo wie in 4) β) oder 5) β) die Unbekannte selbst als Exponent oder Radikator steht, nur dadurch bewerkstelligt werden kann, daß man die Gleichung logarithmirt.

In den bisher betrachteten Fällen kam die Unbekannte nur je einmal in der Gleichung vor; findet sie sich aber, was natürlich auch möglich ist, mehrmals in einer Gleichung, so ist die Sonderung durch einfache Anwendung der entgegengesetzten Rechnungsarten nur dann möglich, wenn die betreffenden Funktionen summirbar sind, so daß x wieder nur einmal in der Gleichung steht. So ist z. B. die Gleichung

$$m\sqrt[2]{x+a}=b-n\sqrt[2]{x+a}$$

einfach löslich, weil $m\sqrt[2]{x+a}$ und $n\sqrt[2]{x+a}$, d. h. die beiden Funktionen von x summirbar sind; es wird nemlich

$$(m+n)\sqrt[2]{x+a}=b,$$

$$\sqrt[2]{x+a}=\frac{b}{m+n},$$

$$x+a=\left(\frac{b}{m+n}\right)^2,$$

$$x=-a+\left(\frac{b}{m+n}\right)^2;$$

aber $m\sqrt[3]{x+a}=b-n\sqrt[2]{x+a}$ ist einfach nicht löslich, weil die betreffenden Funktionen von x nicht summirbar sind, sondern führt, wenn man auch die Wurzeln dadurch beseitigt, daß man $\sqrt[6]{x+a}=y$,

und sonach $\sqrt[3]{x+a} = y^2$, und $\sqrt[2]{x+a} = y^3$ setzt, auf die Gleichung:

$$my^2 = b - ny^3,$$

wobei man doch nur eine Potenz einzeln stellen und so den Exponenten hinwegschaffen kann, und nicht auch die andere, so daß es unmöglich ist, nach den bisherigen Regeln aus solchen Gleichungen x gesondert darzustellen. Man nennt solche Gleichungen, in welchen x mit verschiedenen Exponenten vorkömmt, wie die eben angeführte, oder wie $x^5 - ax^4 + cx = d$ von diesen höhern Exponenten (höher als 1) höhere oder Gleichungen höherer Grade, die andern aber, aus welchen die erste Potenz der Unbekannten bloß durch Anwendung der bisher bekannten Mittel gesondert dargestellt werden kann, hievon einfache oder auch Gleichungen des ersten Grades. Die Auflösung der letztern wird uns zunächst beschäftigen; von den erstern aber werden wir nur einige bestimmte Formen in der Folge näher in Betracht ziehen.

A. Gleichungen des ersten Grades.

a) Mit Einer Unbekannten.

§. 94.

Die Sätze, nach welchen Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten aufgelöst, d. h. die Sonderung der Unbekannten von den übrigen Zahlen bewerkstelligt wird, haben wir bereits im vorhergehenden §. entwickelt; allein da dieß bloß einzeln für jeden einzelnen Fall der Verbindung geschah, hingegen die Unbekannte eben nicht immer bloß in einer, sondern in der Regel mit den bekannten Zahlen in mehrern Verbindungen zugleich steht, so ist eine weitere Anweisung nöthig, in welcher Folge die einzelnen Sonderungen vorgenommen werden sollen. Nun läßt sich zwar eine ganz strenge Ordnung, die immer eingehalten werden müßte, nicht eigentlich vorschreiben, jedoch wird sich die folgende in den allermeisten Fällen wohl anwendbar zeigen und mag daher als Regel gelten. Modifikationen derselben in den einzelnen Fällen und Abkürzungen wird die Erfahrung lehren.

1) Man vollziehe die Operationen, die unmittelbar vollzogen werden können; solche sind: Summation von Zifferzahlen,

Verkleinerung von Brüchen, Subtraktion, Multiplikation, auch wohl Potenzirung von Aggregaten, Multiplikation und Division von Quotienten;

2) man schaffe die Divisoren hinweg, nachdem man zuvor alle vorkommenden Quotienten oder gleich alle Glieder auf einen gemeinschaftlichen Divisor gebracht hat;

3) man wiederhole, wenn sich nun abermals anbefohlene Operationen (namentlich Subtraktion von Aggregaten) angezeigt finden, die Vollziehung derselben;

4) man scheide aus, d. h. stelle diejenigen Glieder, welche die Unbekannte (als Faktor) enthalten, auf der einen, die übrigen Glieder auf der andern Seite zusammen;

5) man summire auf beiden Seiten und zwar zunächst die vollkommen und dann die unvollkommen summirbaren Glieder;

6) man schaffe den Faktor, den die Unbekannte nun bei sich hat, hinweg.

Anmerkung 1. Wenn sich irgend in einem Stadium der Gleichung in allen Gliedern ein gemeinschaftlicher Faktor vorfindet, so ist dieser unverzüglich zu entfernen.

Anmerkung 2. Wie man sich zu verhalten habe, wenn die Unbekannte in der Verbindung einer Potenz, einer Wurzel oder eines Logarithmus steht, ist schon im §. 93 hinlänglich gezeigt worden, und wäre daher überflüssig gewesen, die betreffenden Sätze in dieser Regel zu wiederholen.

Beispiele.

1) $$\frac{x^2 - a}{bx} - \frac{a - x}{b} = \frac{2x}{b} - \frac{a}{x},$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2 - a}{bx} - \frac{ax - x^2}{bx} &= \frac{2x^2}{bx} - \frac{ab}{bx}, \\ x^2 - a - (ax - x^2) &= 2x^2 - ab, \end{aligned}\right\} \quad [2]\ *)$$

$$x^2 - a - ax + x^2 = 2x^2 - ab, \quad [3]$$

$$ab - a = 2x^2 - x^2 - x^2 + ax, \quad [4]$$

$$a(b - 1) = ax, \quad [5]$$

$$b - 1 = x. \quad [6]$$

*) Die eingeschlossene Nummer [2] hier und in den folgenden Fällen soll andeuten, nach welcher Nummer der Regel verfahren und so die damit bezeichnete Gleichung erhalten worden ist.

Wir wissen aus den Vorbegriffen, daß die gegebene Gleichung zur identischen wird, d. h. daß beide Seiten die nämlichen werden, wenn man den gefundenen Werth für x in dieselbe substituirt; da aber dieß (man sehe die betreffende Ausführung im §. 92) nur dann der Fall, wenn der Werth von x aus der Gleichung richtig abgeleitet ist, so dient eine solche Substitution auch zur Probe, ob richtig gerechnet worden ist oder nicht.

Machen wir diese Probe in unserm Falle, so erhalten wir:

$$\frac{(b-1)^2-a}{b(b-1)}-\frac{a-(b-1)}{b}=\frac{2(b-1)}{b}-\frac{a}{b-1},\ ^{*})$$

$$\frac{b^2-2b+1-a}{b(b-1)}-\frac{a-b+1}{b}=\frac{2b-2}{b}-\frac{a}{b-1},$$

$$\frac{b^2-2b+1-a}{b(b-1)}-\frac{(a-b+1)(b-1)}{b(b-1)}=$$

$$=\frac{(2b-2)(b-1)}{b(b-1)}-\frac{ab}{b(b-1)},$$

$$\frac{b^2-2b+1-a-(ab-a-b^2+2b-1)}{b(b-1)}=\frac{2b^2-4b+2-ab}{b(b-1)},$$
$$\overset{(-)\ (+)\ (+)\ \ (-)\ \ (+)}{}$$

$$\frac{2b^2-4b+2-ab}{b(b-1)}=\frac{2b^2-4b+2-ab}{b(b-1)}.\ ^{**})$$

---

*) Es versteht sich von selbst, daß hier jede Seite für sich auf ihren einfachsten Ausdruck gebracht werden müsse.

**) Die Probe hätte sich zwar hier besser so machen lassen:

$$\frac{(b-1)^2-a-[a-(b-1)](b-1)}{b(b-1)}=\frac{2(b-1)(b-1)-ab}{b(b-1)},$$

$$\frac{(b-1)^2-a-a(b-1)+(b-1)^2}{b(b-1)}=\frac{2(b-1)^2-ab}{b(b-1)},$$

$$\frac{2(b-1)^2-a-ab+a}{b(b-1)}=\frac{2(b-1)^2-ab}{b(b-1)},$$

$$\frac{2(b-1)^2-ab}{b(b-1)}=\frac{2(b-1)^2-ab}{b(b-1)},$$

allein für den Anfänger ist es immer rathsamer, sich die Klammern so viel als möglich vom Halse zu schaffen.

2) $\frac{3x - ab}{\cancel{6}\,3} \times \frac{2}{b} - \frac{x + 3a}{4b} = \frac{a - 2x}{3}$,

$\frac{3x - ab}{3b} - \frac{x + 3a}{4b} = \frac{a - 2x}{3}$, [1]

$\left.\begin{array}{l} \frac{12x - 4ab}{12b} - \frac{3x + 9a}{12b} = \frac{4ab - 8bx}{12b}, \\ 12x - 4ab - (3x + 9a) = 4ab - 8bx, \end{array}\right\}$ [2]

$12x - 4ab - 3x - 9a = 4ab - 8bx$, [3]

$12x - 3x + 8bx = 4ab + 4ab + 9a$, [4]

$\left.\begin{array}{l} 9x + 8bx = 8ab + 9a, \\ (8b + 9)x = (8b + 9)a, \end{array}\right\}$ [5]

$x = a$.

Die Probe zur Uebung.

3) $ab - \frac{(a - b)x}{c} = bx + \frac{a}{c}$,

$x = \frac{a\,(bc - 1)}{a + b\,(c - 1)}$.

Rechnung und Probe zur Uebung.

4) $5 - \left(\frac{7}{2} - \frac{2}{x}\right) . x = \frac{x}{2} - \frac{3x - (4 - 5x)}{4}$,

$\left.\begin{array}{l} 5 - \frac{7x}{2} + 2 = \frac{x}{2} - \frac{3x - 4 + 5x}{4}, \\ 7 - \frac{7x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{8x - 4}{4}, \\ 7 - \frac{7x}{2} = \frac{x}{2} - (2x - 1), \\ 7 - \frac{7x}{2} = \frac{x}{2} - 2x + 1, \end{array}\right\}$ [1]

$14 - 7x = x - 4x + 2$,*) [2]

$14 - 2 = 7x + x - 4x$, [4]

$12 = 4x$, [5]

$3 = x$. [6]

---

*) Man braucht den gemeinschaftlichen Divisor, auf welchen man alle Glieder bringt, nicht erst als solchen anzuzeigen, sondern kann ihn (indem man alle Glieder damit multiplizirt) sogleich hinweglassen.

5) $\frac{3}{x+5} - \frac{2}{3x-5} = \frac{1}{x+1}$.

$3(3x-5)(x+1) - 2(x+5)(x+1) = (x+5)(3x-5)$, [2]

$9x^2 - 6x - 15 - 2x^2 - 12x - 10 = 3x^2 + 10x - 25$, [3]

$9x^2 - 2x^2 - 3x^2 - 6x - 12x - 10x = 15 + 10 - 25$, [4]

$4x^2 - 28x = 0$, [5]

$x - 7 = 0$, [Anm. 1]

$x = 7$. [4]

6) $\sqrt[2]{a-b} = c\sqrt[3]{\frac{a-b}{x+d}}$,

$\left(\sqrt[2]{a-b}\right)^3 = \left(c\sqrt[3]{\frac{a-b}{x+d}}\right)^3$, [§. 93. 5]

$(a-b)\sqrt[2]{a-b} = c^3 \cdot \frac{a-b}{x+d}$, [1]

$\sqrt[2]{a-b} = \frac{c^3}{x+d}$, [Anm. 1]

$(x+d)\sqrt[2]{a-b} = c^3$, [2]

$x\sqrt[2]{a-b} + d\sqrt[2]{a-b} = c^3$, [3]

$x\sqrt[2]{a-b} = c^3 - d\sqrt[2]{a-b}$, [4]

$x = \frac{c^3}{\sqrt[2]{a-b}} - d$. [6]

b) Gleichungen mit mehrern Unbekannten.

§. 95.

In §. 92 haben wir gesehen, daß jede Gleichung nur Eine Unbekannte enthalten soll: wie ist es aber zu nehmen, wenn eine Gleichung ihrer doch zwei oder noch mehrere enthält? Setzen wir, um das zu untersuchen, irgend einen solchen Fall, z. B. $x - ay = b$, so erhalten wir zwar den Werth von x für diese Gleichung mit $x = ay + b$, und wenn wir diesen Werth statt x in die gegebene Gleichung setzen, auch eine identische Gleichung, nemlich $ay + b - ay = b$ oder $b = b$; allein y ist dabei offenbar wie jede andere unbestimmte Zahl, indem ja diese Gleichung bei jedem beliebigen Werthe von y

wahr ist, während es doch der Voraussetzung zufolge eine besondere bestimmte Zahl, also die Gleichung nur bei diesem bestimmten Werthe von y wahr sein sollte. Eben so geht es der Zahl x, wenn wir aus der Gleichung den Werth für y entwickeln, sie erscheint eben dann nicht mehr als eine unbekannte, sondern wie jede andere bekannte Zahl. Soll also die Voraussetzung, daß sowohl x als auch y wirklich Unbekannte sind, in Kraft bleiben, so reichen wir mit Einer Setzung nicht aus, weil damit immer eine der Unbekannten als solche verschwindet, sondern es sind offenbar zwei Setzungen (Gleichungen) hiezu erforderlich. Natürlich muß die zweite Gleichung, um eine Setzung für x oder y zu sein, diese beiden Größen oder wenigstens eine davon wieder enthalten, so daß, wenn wir als diese zweite Gleichung etwa $ax - y = c$ setzen, die x und die y beider Gleichungen die nämlichen Zahlen sind. Leiten wir aus dieser den Werth von y nemlich $y = ax - c$ ab, so ist durch diesen y, wie durch den oben aus der ersten Gleichung gezogenen Werth x als Unbekannte in Geltung. So würde denn, wenn eine dritte Unbekannte vorhanden wäre, für sie auch eine dritte Gleichung, für eine vierte ebenfalls eine vierte Gleichung, also immer so viele Gleichungen als Unbekannte erforderlich sein, wenn diese Unbekannten alle nicht unbestimmte Zahlen werden, sondern was die Voraussetzung ist, bestimmte bleiben sollen.

Noch aber setzt jede Gleichung für sich nur Eine Unbekannte und hebt damit die übrigen auf: alle Unbekannten sind nur dann zugleich gesetzt, wenn auch alle Gleichungen zugleich, also in Einer Gleichung gelten. Wir müssen also alle Gleichungen in Eine vereinigen. — Würden wir nun das z. B. auf die Art thun, daß wir

$$\begin{array}{r} x - ay = b \\ \text{und}\quad ax - y = c \\ \hline \end{array}$$

durch Addition in $(a+1)x - (a+1)y = b + c$ vereinigten, so stünden wir natürlich wieder da, wo wir anfangs standen, d. h. wieder bei Einer Gleichung mit zwei Unbekannten. Die Vereinigung muß also in anderer Weise, nemlich jedenfalls so geschehen, daß die Eine erhaltene Gleichung auch nur mehr Eine Unbekannte enthalte.

Wenn wir drei Gleichungen mit drei Unbekannten haben, so werden wir wohl nicht in Einer Zusammensetzung zwei Unbekannte

auf einmal hinwegschaffen können, wir werden also etwa die erste und zweite, und dann die zweite und dritte, kurz je zwei Gleichungen so zusammensetzen, d. h. in Eine vereinigen, daß in den beiden hiedurch zu erhaltenden Gleichungen dieselbe dritte Unbekannte hinwegfällt, wir also wieder zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten haben und aus diesen dann wieder Eine mit Einer Unbekannten ableiten können. So hat man denn allgemein, wenn n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben sind, hieraus (n — 1) Gleichungen mit (n — 1) Unbekannten, aus diesen aber (n — 2) Gleichungen mit (n — 2) Unbekannten u. s. w. abzuleiten, bis man endlich auf die eigentliche Eine Gleichung (in der alle gegebenen zusammen bestehen) mit einer Unbekannten gekommen ist.

Aus dieser Einen Gleichung nun läßt sich der bestimmte Werth dieser Unbekannten nach §. 93 und 94 wirklich darstellen; diese hört damit auf eine Unbekannte zu sein, und so hat man an den Gleichungen, welche zuvor diese und noch eine zweite Unbekannte enthielten, nur mehr Gleichungen mit Einer (der zweiten) Unbekannten, aus denen wieder diese als bestimmte hergestellt werden kann, worauf die Gleichungen mit drei Unbekannten nur mehr Eine solche enthalten u. s. w.

Der Methoden, durch welche obige allmählige Vereinigungen in immer wenigere Gleichungen mit immer wenigeren Unbekannten bis zuletzt in Eine Gleichung mit Einer Unbekannten bewerkstelligt werden, gibt es drei:

I. die Substitutions-,
II. die Comparations-,
III. die Summations-Methode. *)

I. Durch Substitution wird eine Unbekannte aus den gegebenen Gleichungen hinweggeschafft, indem man den Werth derselben aus einer der Gleichungen entwickelt und ihn für die Unbekannte in die übrigen setzt (substituirt), nach dem Grundsatze: „Gleiches für Gleiches gesetzt besteht die Gleichung wie zuvor."

*) Gewöhnlich nennt man die letztere Eliminations-Methode, gewiß sehr unpassend, indem ja nicht bloß durch diese, sondern auch durch jede andere Methode Unbekannte eliminirt, d. h. hinweggeschafft werden. Diese Elimination geht bei der ersten Methode durch Substitution, bei der zweiten durch Comparation, bei dieser dritten eben durch Summation vor sich — daher der Name.

II. Dasselbe geschieht durch Comparation, indem man die Werthe der Unbekannten, die eliminirt werden soll, aus allen gegebenen Gleichungen entwickelt und je zwei dieser Werthe einander gleich stellt (comparirt), nach dem Grundsatze: „Zwei Größen, die einer dritten gleich, sind es auch unter sich."

III. Durch Summation wird eine Unbekannte aus je zwei Gleichungen auf folgende Weise entfernt: Zuerst bringt man diese Unbekannte in den fraglichen zwei Gleichungen auf denselben Coëffizienten, natürlich eben so wie man zwei Quotienten auf denselben Divisor bringt; sodann summirt man die Gleichungen zu dem Zwecke, die Unbekannte sich dadurch in den beiden Gleichungen aufheben zu machen, weßwegen denn diese zu addiren sind, wenn die Glieder mit der wegzuschaffenden Unbekannten ungleiche, aber zu subtrahiren, wenn sie gleiche Zeichen haben. Die Summation geschieht übrigens nach dem Grundsatze: „Gleiches zu Gleichem addirt, oder Gleiches von Gleichem subtrahirt gibt Gleiches."

Anmerkung. Die Summations-Methode kann man auch wohl in der Art anwenden, daß man eine von den Gleichungen, welche summirt werden sollen, zuvor mit einer willkührlichen (unbestimmten) Zahl multiplizirt und hierauf die Gleichungen wie oben summirt. Damit enthält denn jeder Coëffizient, und so auch der der hinwegzuschaffenden Unbekannten jene willkührliche Zahl und kann somit, je nachdem dieselbe bestimmt wird, jeden willkührlichen Werth annehmen, also auch den Werth 0. Läßt man nun den Coëffizienten der wegzuschaffenden Unbekannten diesen Werth 0 annehmen (wobei zugleich die willkührliche Zahl selbst bestimmt wird), so fällt natürlich dieses Glied und damit die Unbekannte hinweg. Man nennt diese Methode der Summation die französische.

In Betreff der Anwendung dieser Methoden sind noch zwei Punkte zu erwähnen:

1) In allen Fällen müssen alle gegebenen Gleichungen erst gereinigt, d. h. nach der oben §. 94 vorgeschriebenen Ordnung bis zur Summation incl. aufgelöst sein, ehe irgend eine dieser Methoden gewählt wird;
2) welche Methode jedesmal in Anwendung zu bringen sei, hängt von der Art der Gleichungen ab: läßt sich z. B. für eine der Unbekannten aus einer Gleichung ein einfacher Werth herstellen, etwa ein einfacher Quotient oder eine einfache

Differenz ꝛc., so ist die Substitutions-Methode angezeigt; bei zusammengesetzten, besonders Buchstabengleichungen wendet man lieber die Comparations-, bei numerischen Gleichungen am liebsten die Summations-Methode an.

Aus den folgenden Beispielen mag man das Weitere rücksichtlich dieser Anwendungen entnehmen.

Beispiele.

1. 1) $\frac{3x-2y}{5}-\frac{3y+3}{8}=\frac{1}{6}(3x-z)-4,$

2) $\frac{x+z}{2}=y,$

3) $\frac{x+y+z}{7}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}+\frac{z}{3}\right)+1.$

A. Reinigung der Gleichungen.

1) $\frac{3x-2y}{5}-\frac{3y+3}{8}=\frac{x}{2}-\frac{z}{6}-4,$

$72x-48y-45y-45=60x-20z-480,$

$72x-60x-48y-45y+20z=45-480,$

$12x-93y+20z=-435;$

2) $x+z=2y,$

$x-2y+z=0;$

3) $\frac{x+y+z}{7}=\frac{x}{8}+\frac{z}{6}+1,$

$24x+24y+24z=21x+28z+168,$

$24x-21x+24y+24z-28z=168,$

$3x+24y-4z=168.$

Gereinigte Gleichungen mit drei Unbekannten:

1) $12x-93y+20z=-435;$

2) $x-2y+z=0;$

3) $3x+24y-4z=168.$

B. Substitution.

a) Aus 2) erhalten wir: $x=2y-z,$

und dieß in 1) substituirt:

$12(2y-z)-93y+20z=-435,$

$24y-12z-93y+20z=-435,$

$-69y+8z=-435,$

1) $69y-8z=435;$

in 3):

$3(2y - z) + 24y - 4z = 168$,
$6y - 3z + 24y - 4z = 168$,
2') $30y - 7z = 168$;

Gereinigte Gleichungen mit zwei Unbekannten:

1') $69y - 8z = 435$;
2') $30y - 7z = 168$;

b) aus 1') erhalten wir: $\frac{69y - 435}{8} = z$,

dieß in 2') substituirt gibt:

$30y - 7 \times \frac{69y - 435}{8} = 168$, d. i. die gesuchte Eine Gleichung mit Einer Unbekannten.

C. Endliche Auflösung.

$30y - \frac{483y - 3045}{8} = 168$,
$240y - 483y + 3045 = 1344$,
$3045 - 1344 = 483y - 240y$,
$1701 = 243y$,
$7 = y$;

Gereinigte Gleichungen mit Einer Unbekannten:

1'') $y = 7$,
2'') $z = 6$,
3'') $x = 8$.

dieſen Werth von y in 2') substituirt, erhalten wir:
$30 . 7 - 7z = 168$,
$30 - z = 24$,
$30 - 24 = z$,
$6 = z$;
endlich die Werthe von y und z in 2):
$x - 2 . 7 + 6 = 0$,
$x = 14 - 6 = 8$.

---

2. 1) $bx + cy = cz + b$,
2) $cy + \frac{z}{a} = \frac{b^2x}{a} + \frac{1}{c}$,
3) $b(x - z) = a(1 - y)$.

A. Reinigung.

1) $bx + cy - cz = b$;
2) $ac^2y + cz = b^2cx + a$,
$-b^2cx + ac^2y + cz = a$;
3) $bx - bz = a - ay$,
$bx + ay - bz = a$.

Gereinigte Gleichungen mit drei Unbekannten:

1) $bx + cy - cz = b$,
2) $-b^2cx + ac^2y + cz = a$,
3) $bx + ay - bz = a$.

B. Comparation.

a) Den Werth von z aus den drei Gleichungen gesucht, erhalten wir:

1) $\frac{bx + cy - b}{c} = z,$

2) $z = \frac{b^2cx - ac^2y + a}{c},$

3) $\frac{bx + ay - a}{b} = z.$

b) Den Werth 1) und 2) comparirt:

$$\frac{b^2cx - ac^2y + a}{c} = \frac{bx + cy - b}{c},$$

$$b^2cx - bx - ac^2y - cy = -a - b,$$

$$bx(bc - 1) - cy(ac + 1) = -(a + b),$$

$$-b(bc - 1)x + c(ac + 1)y = a + b.$$

Werth 1) und 3) comparirt:

$$\frac{bx + cy - b}{c} = \frac{bx + ay - a}{b},$$

$$b^2x + bcy - b^2 = bcx + acy - ac,$$

$$b^2x - bcx + bcy - acy = b^2 - ac,$$

$$bx(b - c) - cy(a - b) = b^2 - ac.$$

Gereinigte Gleichungen mit zwei Unbekannten:

1') $-b(bc - 1)x + c(ac + 1)y = a + b,$

2') $b(b - c)x - c(a - b)y = b^2 - ac.$

c) Den Werth von y aus 1') und 2') gesucht:

1') $y = \frac{b(bc - 1)x + a + b}{c(ac + 1)};$

2') $y = \frac{b(b - c)x + ac - b^2}{c(a - b)}.$

d) Diese beiden Werthe von y comparirt, erhalten wir folgende Eine Gleichung mit Einer Unbekannten:

$$\frac{b(bc - 1)x + a + b}{c(ac + 1)} = \frac{b(b - c)x + ac - b^2}{c(a - b)}.$$

C. Endliche Auflösung.

$$\frac{b(bc-1)x+a+b}{ac+1} = \frac{b(b-c)x+ac-b^2}{a-b},$$

$$b(a-b)(bc-1)x+(a+b)(a-b) =$$
$$= b(b-c)(ac+1)x+(ac-b^2)(ac+1),$$
$$(ab^2c-ab-b^3c+b^2)x+a^2-b^2 =$$
$$= (ab^2c+b^2-abc^2-bc)x+a^2c^2+ac-ab^2c-b^2,$$
$$(ab^2c-ab^2c-ab-b^3c+b^2-b^2+abc^2+bc)x =$$
$$= a^2c^2+ac-a^2+b^2-ab^2c-b^2,$$
$$b(ac^2-b^2c+c-a)x = a(ac^2-b^2c+c-a),$$
$$x = \frac{a}{b}.$$

Diesen Werth von x in 1') gesetzt, erhalten wir:

$$-b(bc-1)\cdot\frac{a}{b}+c(ac+1)y = a+b,$$
$$-abc+a+c(ac+1)y = a+b,$$
$$c(ac+1)y = abc+b,$$
$$c(ac+1)y = b(ac+1),$$
$$y = \frac{b}{c}.$$

Die erhaltenen Werthe von x und y in 1) substituirt:

$$b\cdot\frac{a}{b}+c\cdot\frac{b}{c}-cz = b,$$
$$a+b-cz = b,$$
$$a+b-b = cz,$$
$$a = cz,$$
$$\frac{a}{c} = z.$$

Gereinigte Gleichungen mit Einer Unbekannten:

1') $x = \frac{a}{b}$;

2') $y = \frac{b}{c}$;

3') $z = \frac{a}{c}$;

---

3. 1) $2x-\frac{y}{2}+4z = 13,$

2) $\frac{7x-y}{5}-\frac{3z+1}{10} = 2-\frac{2z}{3},$

3) $\frac{5}{6}\left(\frac{4y-2x}{3}\right) = \frac{2}{3}+\frac{x+z}{4}.$

A. Reinigung.

1) $4x - y + 8z = 26$;

2) $42x - 6y - 9z - 3 = 60 - 20z$,

$42x - 6y + 11z = 63$;

3) $\frac{10y}{9} - \frac{5x}{9} = \frac{2}{3} + \frac{x+z}{4}$,

$40y - 20x = 24 + 9x + 9z$,

$-29x + 40y - 9z = 24.$

Gereinigte Gleichungen mit drei Unbekannten.

1) $4x - y + 8z = 26$;

2) $42x - 6y + 11z = 63$;

3) $-29x + 40y - 9z = 24.$

B. Summation.

a) 1) und 2) summirt, um y wegzuschaffen:

$$\begin{array}{rrrr} 24x - 6y + 48z = 156, \\ 42x - 6y + 11z = 63, \\ \hline (-) \quad (+) \quad (-) \quad\quad (-) \\ \hline -18x \quad\quad + 37z = 93; \end{array}$$

Gereinigte Gleichungen mit zwei Unbekannten:

1′) $-18x + 37z = 93$;

2′) $131x + 311z = 1064$;

b) 1) und 3) summirt zu demselben Zwecke:

$$\begin{array}{rrrr} 160x - 40y + 320z = 1040, \\ -29x + 40y - 9z = 24, \\ \hline 131x \quad\quad + 311z = 1064; \end{array}$$

c) 1′) und 2′) summirt, um x wegzuschaffen:

$$\begin{array}{rrrr} -18 \,.\, 131x + 4847z = 12183, \\ 18 \,.\, 131x + 5598z = 19152, \\ \hline 10445y = 31335. \end{array}$$

C. Endliche Auflösung.

$$z = \frac{31335}{10445} = 3;$$

diesen Werth von z in 1′) substituirt:

$-18x + 37 \,.\, 3 = 93,$

$111 - 93 = 18x,$

$18 = 18x,$

$1 = x;$

endlich die Werthe von x und z in 1) gesetzt:

$4 \,.\, 1 - y + 8 \,.\, 3 = 26,$

$4 + 24 - 26 = y,$

$2 = y.$

Gereinigte Gleichungen mit zwei Unbekannten:

1′) $-18x + 37z = 93$;

2′) $131x + 311z = 1064$;

Gereinigte Gleichungen mit Einer Unbekannten:

1″) $z = 3$;

2″) $x = 1$,

3″) $y = 2.$

4. 1) $\frac{4x}{3} - \frac{3y}{4} + \frac{z}{5} = \frac{2x+4}{5}$,

2) $\frac{2}{3}(2z - y) - \frac{7}{5} = \frac{x+2z}{5}$,

3) $\frac{x+y+z}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4}\right)$.

A. Reinigung.

1) $80x - 45y + 12z = 24x + 48$,
$56x - 45y + 12z = 48$;

2) $\frac{4z}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{7}{5} = \frac{x+2z}{5}$,
$20z - 10y - 21 = 3x + 6z$,
$-3x - 10y + 14z = 21$;

3) $x + y - z = \frac{x}{3} + \frac{y}{4}$,
$12x + 12y - 12z = 4x + 3y$,
$8x + 9y - 12z = 0$.

Gereinigte Gleichungen mit drei Unbekannten:

1) $56x - 45y + 12z = 48$;
2) $-3x - 10y + 14z = 21$;
3) $8x + 9y - 12z = 0$.

B. Französische Summation.

a) 1) und 2) summirt, um y wegzuschaffen, wobei die Gleichung 2) mit der willkührlichen Zahl m multiplizirt wird.

$$\begin{array}{rrrr} 56x & - 45y & + 12z & = 48, \\ (-) & (+) & (-) & (-) \\ -3mx & - 10my & + 14mz & = 21m, \end{array}$$

$$-(3m+56)x - (10m-45)y + (14m-12)z = 21m - 48.$$

Setzt man nun den Coëffizienten von $y = 0$, so findet man aus $10m - 45 = 0$ denjenigen Werth von m, bei welchem eben dieser Coëffizient $= 0$ wird, und somit das Glied mit y ausfällt, nämlich:

$$10m - 45 = 0,$$
$$10m = 45,$$
$$2m = 9,$$
$$m = \frac{9}{2}.$$

Diesen Werth von m in die Summations-Gleichung gesetzt, erhält man:

$$-\left(3.\frac{9}{2}+56\right)x-\left(10.\frac{9}{2}-45\right)y+\left(14.\frac{9}{2}-12\right)z=$$
$$=21.\frac{9}{2}-48,$$
$$-\frac{139}{2}x-0.y+51z=\frac{93}{2},$$
$$-139x+102z=93;$$

Gereinigte Gleichungen mit zwei Unbekannten.

1') $-139x+102z=93;$

2') $2x-z=1;$

b) die Gleichungen 1) und 3) summirt, um ebenfalls y wegzuschaffen, und zwar 3) mit der willkührlichen Zahl n multiplizirt:

$56x-45y+12z=48,$
$8nx+9ny-12nz=0,$

$(8n+56)x+(9n-45)y-(12n-12)z=48;$

setzt man wieder $9n-45=0$, woraus $n=5$, und substituirt diesen Werth von n in die Summations-Gleichung, so erhält man:

$(8.5+56)x+(9.5-45)y-(12.5-12)z=48,$
$96x+0.y-48z=48,$
$2x-z=1;$

c) 1') und 2') summirt, um z wegzuschaffen, und zwar 2') mit der willkührlichen Zahl p multiplizirt:

$-139x+102z=93,$
$2px-pz=p,$

$(2p-139)x-(p-102)z=p+93;$

setzt man $p-102=0$, so wird $p=102$; dieß in die Gleichung substituirt, gibt:

$(2.102-139)x-(102-102)z=102+93.$

C. Auflösung.

$65x=195,$
$x=3;$

Gereinigte Gleichungen mit Einer Unbekannten:

$x=3;$

dieß in 2') substituirt:

$2.3-z=1,$
$6-1=z,$
$5=z;$

$z=5;$

die Werthe von x und z in 3):

$8.3+9y-12.5=0,$
$9y=60-24,$
$9y=36,$
$y=4.$

$y=4.$

Hiemit haben wir denn von jeder der oben aufgeführten Methoden ein Beispiel. Wir könnten nun mit den Beispielen schließen, wenn nicht noch einige Schwierigkeiten zu erwähnen wären, welche durch besondere Formen der Gleichungen entstehen. Welches diese Schwierigkeiten sind, und wie sie beseitigt werden, mag am besten wieder aus Beispielen erkannt werden; daher hier noch einige folgen:

5. 1) $\frac{8}{x} - \frac{15}{y} + \frac{5}{z} = 0$,

2) $\frac{5}{3x} + \frac{3}{2y} + \frac{10}{3y} = 1$,

3) $\frac{1}{5x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{3z} = \frac{1}{8}$.

Würde man hier, wie gewöhnlich, die Divisoren wegschaffen, so würde man auf die Produkte xyz, xy, xz kommen, und so die Gleichung statt zu vereinfachen eher verwickeln. Es ist aber auch gar nicht nöthig, daß man das thue; man kann sich dagegen auf doppelte Art helfen: entweder setzt man $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$, $\frac{1}{z} = z'$, wodurch die Unbekannten in den Divisoren sogleich wegfallen; oder man läßt sie durchaus während der ganzen Elimination in den Divisoren stehen, wie wir im Folgenden thun werden.

A. Reinigung.

2) $\frac{10}{6x} + \frac{9}{6y} + \frac{20}{6z} = 1$,

$\frac{10}{x} + \frac{9}{y} + \frac{20}{z} = 6$;

3) $\frac{24}{120x} + \frac{30}{120y} + \frac{40}{120z} = \frac{15}{120}$,

$\frac{24}{x} + \frac{30}{y} + \frac{40}{z} = 15$.

Gereinigte Gleichungen mit drei Unbekannten:

1) $\frac{8}{x} - \frac{15}{y} + \frac{5}{z} = 0$;

2) $\frac{10}{x} + \frac{9}{y} + \frac{20}{z} = 6$;

3) $\frac{24}{x} + \frac{30}{y} + \frac{40}{z} = 15$.

B. Summation.

a) 1) und 2) summirt, um z wegzuschaffen:

$\frac{32}{x} - \frac{60}{y} + \frac{20}{z} = 0$,
(−) (+) (−)
$\frac{10}{x} + \frac{9}{y} + \frac{20}{z} = 6$,

$-\frac{22}{x} + \frac{69}{y} = 6$;

Gereinigte Gleichungen mit zwei Unbekannten:

1) $-\frac{22}{x} + \frac{69}{y} = 6$;

2) $\frac{4}{x} + \frac{12}{y} = 3$.

b) 2) und 3) summirt, um z wegzuschaffen:

$$\frac{20}{x} + \frac{18}{y} + \frac{40}{z} = 12,$$
$$(-) \qquad (-) \qquad (-) \qquad (-)$$
$$\frac{24}{x} + \frac{30}{y} + \frac{40}{z} = 15,$$

$$\frac{4}{x} + \frac{12}{y} = 3;$$

c) 1') und 2') summirt, x wegzuschaffen:

$$-\frac{44}{x} + \frac{138}{y} = 12,$$
$$\frac{44}{x} + \frac{132}{y} = 33,$$

$$\frac{270}{y} = 45,$$
$$\frac{6}{y} = 1,$$
$$6 = y.$$

C. Weitere Auflösung.

In 2') substituirt:

$$\frac{4}{x} + \frac{12}{6} = 3,$$
$$\frac{4}{x} = 1,$$
$$4 = x;$$

in 1) substituirt:

$$\frac{8}{4} - \frac{15}{6} + \frac{5}{z} = 0,$$
$$\frac{5}{z} = -2 + \frac{3}{2},$$
$$\frac{5}{z} = \frac{1}{2},$$
$$10 = z.$$

Gereinigte Gleichungen mit Einer Unbekannten:

1'') $y = 6$;
2'') $x = 4$;
3'') $z = 10$.

6. 1) $x + y = 2a$;
   2) $x + z = 2c$;
   3) $y + z = 2b$.

Da hier, wie allemal, wenn drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben sind, die nächste Aufgabe die ist, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zu suchen, aber ohnehin lauter Gleichungen mit je zwei Unbekannten vorliegen, so kann man eine davon, etwa 1) sogleich behalten, muß aber nun natürlich die beiden andern so verbinden, daß die dritte in 1) nicht enthaltene Unbekannte hinwegfalle.

$$\begin{array}{rrrr} x & + & z & = 2c, \\ (-) & (-) & & (-) \\ y & + & z & = 2b, \\ \hline -x & + & y & = 2b - 2c; \end{array}$$

Gereinigte Gleichungen mit zwei Unbekannten:

1′) $x + y = 2a$;
2′) $-x + y = 2b - 2c$;

hieraus $2y = 2a + 2b - 2c$,
$y = a + b - c$.

Dieselben Gleichungen 1′) und 2′) geben, wenn man die letztere von der erstern subtrahirt:

$$2x = 2a - 2b + 2c,$$
$$x = a - b + c.$$

Endlich den Werth von x in 2) subtrahirt, erhalten wir:

$$a - b + c + z = 2c,$$
$$z = -a + b + c.$$

In allen bisherigen Beispielen waren die einzelnen Unbekannten bloß durch Summation verbunden; da sie aber natürlich auch durch Multiplikation (Division) verbunden vorkommen können, so müssen wir auch über die bei solcher Verbindung entstehenden möglichen Formen von Gleichungen Einiges beibringen. Wir ziehen im Folgenden bloß Produkte in Betracht, theils weil, wenn Quotienten von der Form $\frac{x}{y}$, $\frac{y}{z}$ ꝛc. vorkommen, bei Wegschaffung der Divisoren doch wieder Produkte entstehen, theils weil solche Quotienten auch leicht unmittelbar in Produkte verwandelt werden können, wenn man z. B. $\frac{1}{y} = y'$ setzt, indem dann $\frac{x}{y} = xy'$ wird.

In Betreff der Produkte nun sind folgende Fälle zu merken:

a) Es kommen bloß Produkte aus den Unbekannten vor, und zwar bei drei Unbekannten aus je zweien, bei vier aus je dreien, z. B. $xy + yz = a$, oder $xyz - yzv = m$ u. dgl. Da unter der hier gemachten Voraussetzung hiebei immer eben so viele verschiedene Produkte vorhanden sind als Unbekannte oder als Gleichungen da sind, so kann man recht wohl diese Produkte selbst als die Unbekannten betrachten, indem man z. B. $xy = x'$, $xz = y'$, $yz = z'$ setzt. Wie sodann, wenn man diese Produkte kennt, aus denselben die eigentlichen Unbekannten hergestellt werden, werden wir aus dem unten folgenden Beispiele ersehen.

b) Die Gleichungen enthalten

1) je ein Produkt aus zwei Unbekannten und außerdem nur diese Unbekannten einzeln, z. B. $xy = ax + by$; *)
2) je ein Produkt aus drei Unbekannten und außerdem drei Produkte aus je zweien, z. B. $xyz = axy - bxz + cyz$,
3) je ein Produkt aus vier Unbekannten und vier Produkte aus je dreien, u. s. w.

In allen diesen Fällen lassen sich die Gleichungen auf die Form unsers obigen fünften Beispiels bringen, und werden daher wie dieses aufgelöst. So verwandelt sich $xy = ax + by$ durch Division mit xy in $1 = \frac{a}{y} + \frac{b}{x}$, oder $xyz = axy - bxz + cyz$ in $1 = \frac{a}{z} - \frac{b}{y} + \frac{c}{x}$.

c) In allen übrigen außer den unter a) und b) angeführten Fällen **) führt die Elimination auf Gleichungen höherer Grade, wie z. B. bei den Gleichungen:

1) $xy - x = a$,
2) $xy + y = b$.

---

*) Derartige Gleichungen findet man häufig auch in der Form: $\frac{xy}{ax+by} = 1$.

**) Natürlich könnten auch einzelne ganz spezielle Aufgaben ausgedacht werden, bei welchen der auf höhere Gleichungen deutenden Form ungeachtet dennoch Gleichungen des ersten Grades erhalten würden, ähnlich wie im Beispiel 5. des §. 94, wo man auch eine Gleichung des zweiten Grades erwarten sollte; — diese Ausnahmen heben aber die Regel nicht auf.

Wenden wir hier die Subſtitutions-Methode an, ſo erhalten wir aus 1):

$$x(y-1) = a,$$

$$x = \frac{a}{y-1};$$

dieß in 2) ſubſtituirt gibt:

$$\frac{a}{y-1} \times y + y = b;$$

$$ay + y^2 - y = by - b,$$

offenbar eine höhere Gleichung.

d) Nur in einzelnen Fällen erlaubt die Natur der Aufgabe, wie z. B. in den folgenden Beiſpielen 7. und 8. gewiſſe ſogenannte Kunſtgriffe, welche die ſonſt entſtehende höhere Gleichung zu umgehen möglich machen. Der in 7. und 8. angewendete Kunſtgriff iſt wohl der am häufigſten gebrauchte, es gibt aber deren noch viele andere; allein die Kunſt, in allen Fällen immer ſogleich den geeignetſten Weg zur Löſung (den Kunſtgriff) zu finden, kann nicht gelehrt, ſie kann bloß durch Uebung erworben werden.

7. 1) $xy - zu = \frac{(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 - b^2 - c^2)}{c^2(a^2 - b^2)}$,

2) $yz - xu = \frac{4ab}{a^2 - b^2}$,

3) $xz = 1$,

4) $yu = 1$.

Da wir hier ſechſerlei Produkte, aber nur vier Gleichungen haben, ſo gehörte dieſe Aufgabe zu denen, welche auf höhere Gleichungen führen, wenn wir ſie nicht durch gewiſſe Kunſtgriffe zu löſen vermöchten. Wir betrachten nemlich zunächſt die vier Produkte der beiden erſten Gleichungen, als unſere Unbekannten, indem wir $xy = x'$, $yz = y'$, $zu = z'$ und $xu = u'$ ſetzen. Weil wir aber für dieſe vier Unbekannten nur zwei Gleichungen haben, ſo müſſen wir noch nach weitern Gleichungen für ſie umſehen. Hier können wir nun 3) und 4) brauchen; dieſe geben nemlich:

$$xz = 1,$$

$$yu = 1,$$

$$\text{woraus } xyzu = 1,$$

welche Gleichung wir, obgleich ſie im Grunde nur Eine iſt, für unſere Unbekannten doch in zwei umſetzen können, nemlich in

$xy \cdot zu = 1$ und in $xu \cdot yz = 1$. Wir haben also mit unsern neuen Unbekannten nun folgende vier Gleichungen:

$$1')\ x' - z' = \frac{(a^2 - b^2)^2 - c^4}{(a^2 - b^2)\,c^2} \text{ aus } 1),$$

$$2')\ y' - u' = \frac{4ab}{a^2 - b^2} \text{ aus } 2),$$

$$\left.\begin{aligned} 3')\ x'\,z' &= 1 \\ 4')\ y'\,u' &= 1 \end{aligned}\right\} \text{ aus 3) und 4) zusammen.}$$

Damit haben wir aber augenscheinlich nicht mehr vier Gleichungen mit vier Unbekannten, sondern zweimal zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten, nemlich 1') und 3') mit x' und z', 2') und 4') mit y' und u'.

Wir gehen zuerst an die Lösung der beiden erstern.

Würden wir nun hier etwa die Substitutions-Methode anwenden, so erhielten wir eine Gleichung von der Form: $x^2 + ax = b$, also eine Gleichung des zweiten Grades. Dieß zu vermeiden, schlagen wir folgenden Weg ein:

Gleichung 1') zum Quadrat erhoben gibt:

$$x'^2 - 2x'z' + z'^2 = \frac{(a^2 - b^2)^4 - 2(a^2 - b^2)^2 c^4 + c^8}{(a^2 - b^2)^2 c^4},$$

dazu aus 3'):

$$4x'z' = 4,$$

$$x'^2 + 2x'z' + z'^2 = \frac{(a^2 - b^2)^4 - 2(a^2 - b^2)^2 c^4 + c^8 + 4(a^2 - b^2)^2 c^4}{(a^2 - b^2)^2 c^4}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)^4 + 2(a^2 - b^2)^2 c^4 + c^8}{(a^2 - b^2)^2 c^4},$$

$$\text{woraus } x' + z' = \frac{(a^2 - b^2)^2 + c^4}{(a^2 - b^2)c^2},$$

$$\text{aber } x' - z' = \frac{(a^2 - b^2)^2 - c^4}{(a^2 - b^2)\,c^2},$$

$$\text{mithin } 2x' = \frac{2(a^2 - b^2)^2 \ldots 2c^4}{(a^2 - b^2)c^2}, \quad \text{aber } 2z' = \frac{\ldots}{(a^2 - b^2)c^2},$$

$$x' = \frac{a^2 - b^2}{c^2}; \qquad z' = \frac{c^2}{a^2 - b^2}.$$

Dasselbe Verfahren auf 2') und 4') ebenfalls angewendet, haben wir:

$$y'^2 - 2y'u' + u'^2 = \frac{16a^2b^2}{(a^2-b^2)^2},$$
$$4y'u' = 4,$$

$$y'^2 + 2y'u' + u'^2 = \frac{16a^2b^2 + 4(a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)^2},$$
$$= \frac{16a^2b^2 + 4a^4 - 8a^2b^2 + 4b^4}{(a^2-b^2)^2},$$
$$= \frac{4a^4 + 8a^2b^2 + 4b^4}{(a^2-b^2)^2};$$

mithin ist $y' + u' = \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2-b^2}$,

aber $y' - u' = \frac{4ab}{a^2-b^2}$,

und so $2y' = \frac{2a^2 + 4ab + 2b^2}{a^2-b^2}$, aber $2u' = \frac{2a^2 - 4ab + 2b^2}{a^2-b^2}$,

$= \frac{2(a+b)^2}{a^2-b^2}$, $= \frac{2(a-b)^2}{a^2-b^2}$,

woraus $y' = \frac{a+b}{a-b}$, $u' = \frac{a-b}{a+b}$.

Subſtituiren wir nun ſtatt dieſer angenommenen die Produkte aus den urſprünglichen Unbekannten, ſo erhalten wir folgende vier Gleichungen:

$$1'') \quad xy = \frac{a^2-b^2}{c^2},$$
$$2'') \quad zu = \frac{c^2}{a^2-b^2},$$
$$3'') \quad yz = \frac{a+b}{a-b},$$
$$4'') \quad xu = \frac{a-b}{a+b};$$

allein da ſie nur aus drei Gleichungen abgeleitet ſind, ſo reichen ſie zur Beſtimmung unſerer vier Unbekannten nicht hin, und wir müſſen daher wieder eine der in Eine Gleichung zuſammengeſchmolzenen Gleichungen 3) und 4) zu Hilfe nehmen.

Auf dieſe Art endlich finden wir:

aus $\frac{1'')}{3'')}$:

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{c^2},$$

$$yz = \frac{a + b}{a - b},$$

$$\frac{xy}{yz} = \frac{x}{z} = \frac{(a-b)^2}{c^2},$$

aber nach 3) ist: $xz = 1$;

mithin a) $\frac{x}{z} \times xz = x^2 = \frac{(a-b)^2}{c^2}$, b) $xz : \frac{x}{z} = z^2 = \frac{c^2}{(a-b)^2}$,

$$1''') \; x = \frac{a-b}{c}; \qquad 2''') \; z = \frac{c}{a-b}.$$

Ebenso gibt $\frac{1'')}{4'')}$:

$$xy = \frac{a^2 - b^2}{c^2},$$

$$xu = \frac{a-b}{a+b},$$

$$\frac{xy}{xu} = \frac{y}{u} = \frac{(a+b)^2}{c^2},$$

aber nach 4) ist: $yu = 1$,

mithin a) $\frac{y}{u} \times yu = y^2 = \frac{(a+b)^2}{c^2}$, b) $yu : \frac{y}{u} = u^2 = \frac{c^2}{(a+b)^2}$,

$$3''') \; y = \frac{a+b}{c}; \qquad 4''') \; u = \frac{c}{a+b}.$$

8. Wir haben im §. 51. Beispiel 3. ein Quadrat kennen gelernt, welches aus einem zweigliedrigen Aggregate gebildet, selbst wieder zweigliedrig war. Solche Quadrate entstehen einfach, wenn die Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln aus Ziffernzahlen quadrirt wird; aber umgekehrt aus dem Quadrate wieder die Wurzel herzustellen, ist hier nach dem gewöhnlichen Verfahren darum unmöglich, weil eben die beiden Quadrate des ersten und des letzten Gliedes in Eine Zahl summirt sind, und man also das Quadrat des ersten Theiles für sich allein nicht mehr erkennt. Hingegen gibt eben die Erfahrung, daß

die Wurzeln solcher Quadrate immer Summen oder Differenzen aus zwei Quadratwurzeln sind, ein einfaches Verfahren an die Hand, dieselben durch zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten sicher zu bestimmen.

Man habe z. B. 1) $\sqrt[2]{13 + 20\sqrt[2]{-3}}$, so ist diese Wurzel nach dem eben ausgesprochenen Erfahrungssatze $= \sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{y}$, wenn wir mit x und y einstweilen die uns noch unbekannten Ziffernzahlen bezeichnen. Wir haben also die Gleichung:

$$\sqrt[2]{13 + 20\sqrt[2]{-3}} = \sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{y},$$

woraus

$$13 + 20\sqrt[2]{-3} = \left(\sqrt[2]{x} + \sqrt[2]{y}\right)^2$$

$$= x + y + 2\sqrt[2]{xy}.$$

Wir haben hier nun freilich nur Eine Gleichung und zwei Unbekannte, allein da wir vom Quadriren solcher Ausdrücke her wissen, daß der rationale Theil (13) des Quadrates immer von den Quadraten (x und y) des ersten und des zweiten Theiles, der irrationale $\left(20\sqrt[2]{-3}\right)$ aber vom doppelten Produkte $\left(2\sqrt[2]{xy}\right)$ beider Theile herrühre, so erhalten wir hieraus die folgenden zwei Gleichungen:

$$1)\quad x + y = 13;$$

$$2)\quad 2\sqrt[2]{xy} = 20\sqrt[2]{-3}.$$

Da wir nun durch 1) die Summe der beiden Unbekannten kennen, aus 2) aber leicht deren vierfaches Produkt hergestellt wird, so läßt sich zur Auflösung dieser Gleichungen derselbe Kunstgriff wie im vorhergehenden Beispiele 7. anwenden.

Wir erhalten nemlich:

aus 1) $x^2 + 2xy + y^2 = 169,$

aus 2) $\underset{(-)}{\quad 4xy} = \underset{(+)}{-1200},$

woraus $x^2 - 2xy + y^2 = 1369,$

und $x - y = 37,$

aber $x + y = 13,$

mithin $x = 25,$

und $y = -12.$

Es ist also $\sqrt[2]{13+20\sqrt{-3}} = \sqrt[2]{25}+\sqrt[2]{-12} = 5+2\sqrt{-3}$.

In der That gibt $(5+2\sqrt{-3})^2 = 25-12+20\sqrt{-3}$ das gegebene Quadrat.

2) $\sqrt[2]{7-4\sqrt[2]{3}} = \sqrt[2]{x}-\sqrt[2]{y}$,

$$7-4\sqrt[2]{3} = x+y-2\sqrt[2]{xy};$$

daher 1) $x+y=7$,

2) $2\sqrt[2]{xy} = 4\sqrt[2]{3}$.

Aus 1): $x^2+2xy+y^2 = 49$,

aus 2): $4xy = 48$,

(–) (–)

daher $x^2-2xy+y^2 = 1$,

$x-y = 1$,

aber $x+y = 7$,

mithin $x = 4$,

$y = 3$,

und daher $\sqrt[2]{7-4\sqrt[2]{3}} = \sqrt[2]{4}-\sqrt[2]{3} = 2-\sqrt[2]{3}$.

c) Unbestimmte Gleichungen.

§. 96.

Wenn mehr Unbekannte vorhanden als Gleichungen gegeben sind, so kommt man natürlich durch Anwendung der im vorigen §. angegebenen Methoden am Ende auch wieder auf Eine Gleichung; aber diese enthält nun nicht bloß Eine Unbekannte, sondern mehrere, und zwar um so mehr oder weniger, je nachdem die Zahl der vorhandenen Unbekannten die der gegebenen Gleichungen mehr oder weniger übersteigt, nämlich zwei Unbekannte, wenn Eine Gleichung, drei, wenn zwei Gleichungen weniger da sind als es Unbekannte sind, u. s. w. Um diese Eine am Ende erhaltene Gleichung mit mehr als Einer Unbekannten handelt es sich denn auch, wenn von solchen Gleichungen die Rede ist, und es entsteht dabei die Frage, ob überhaupt und in wie weit eine bestimmte Lösung derselben möglich sei.

Um dieß zu untersuchen, habe man zunächst eine Gleichung mit zwei Unbekannten, etwa

$$ax + by = c.$$

Hinsichtlich einer solchen Gleichung haben wir nun schon im Eingange des vorhergehenden §. erörtert, wie y zur gänzlich unbestimmten Zahl wird, wenn x als die Unbekannte betrachtet wird, aber ebenso auch x, wenn y die Unbekannte ist. Aber auch die jeweilen als Unbekannte betrachtete Zahl selbst ist nur der Form nach eine bestimmte Zahl, z. B. $x = \frac{c - by}{a}$, oder $y = \frac{c - ax}{b}$, aber dem Werthe nach völlig unbestimmt. Denn indem in dem Werthe von x die Zahl y, in dem von y die x als unbestimmte jeden beliebigen Werth annehmen kann, wird offenbar auch der Werth der Unbekannten mit jeder andern Annahme ein anderer und ist somit keineswegs ein bestimmter.

Von einer Auflösung einer solchen Gleichung, d. h. von der Herstellung bestimmter Werthe für die Unbekannten kann also eigentlich auch nicht die Rede sein, sondern höchstens von der Herstellung korrespondirender Werthe der beiden Unbekannten.

Nimmt man nemlich für die eine Unbekannte y einen beliebigen Werth an, so erhält die andere x einen bestimmten, und dieser bestimmte Werth von x und jener beliebige von y sind also zusammengehörige (korrespondirende) Werthe der beiden Unbekannten, weil gerade sie zusammen die Gleichung wahr machen.

Solcher korrespondirender Werthe aber gibt es natürlich wieder unendlich viele; um nun doch irgend einige Bestimmtheit darein zu bringen, setzt man gewöhnlich die beschränkende Bedingung, daß „beide Unbekannte nur positive und ganze Zahlen sein dürfen." Weil sich aber das nur beim Gebrauche von Zifferzahlen bestimmt sagen läßt, haben wir es hier bloß mit in Ziffern ausgedrückten (numerischen) Gleichungen zu thun.

Der Grad der Bestimmtheit, welchen die vorher gänzlich unbestimmte Gleichung durch diese beschränkende Bedingung erlangt, hängt vorzugsweise von der Verbindung ab, in welcher die auf Eine Seite der Gleichung gebrachten Unbekannten unter sich stehen. So kann die Gleichung $x + y = 7$ nur bei einer beschränkten Anzahl von korrespondirenden Werthen in Wahrheit bestehen,

nemlich 1) wenn $x = 1$ und $y = 6$,
2) „ $x = 2$ „ $y = 5$,
3) „ $x = 3$ „ $y = 4$,
4) „ $x = 4$ „ $y = 3$,
5) „ $x = 5$ „ $y = 2$,
6) „ $x = 6$ „ $y = 1$.

Hingegen ist die Gleichung $x - y = 7$ von $x = 8$ und $y = 1$ an bei allen folgenden Werthen von x und y wahr, nemlich bei

$$x = 9, = 10, = 11, \ldots.$$
$$y = 2, = 3, = 4, \ldots.,$$

mithin ist die Anzahl der korrespondirenden Werthe hier eine unbeschränkte. *)

Ebenso ist es mit $xy = 6$ und $\frac{x}{y} = 6$. Während nemlich die erstere Gleichung nur die korrespondirenden Werthe

$x = 1$ und $y = 6$,
$x = 2$ „ $y = 3$,
$x = 3$ „ $y = 2$,
$x = 6$ „ $y = 1$ zuläßt, kann in den letztern x von 6 an alle Vielfachen von 6, y aber von 1 an alle übrigen Zahlen vorstellen; denn

$$\frac{6}{1} = \frac{12}{2} = \frac{18}{3} = \ldots = 6.$$

Allgemein ist die Anzahl der ganzen und positiven korrespondirenden Werthe eine beschränkte, wenn die Unbekannten durch eine direkte Rechnungsart (Addition, Multiplikation, Potenzirung) verbunden sind, aber eine unbeschränkte, wenn durch eine indirekte.

Dieß zu bestätigen, wollen wir noch einige Gleichungen untersuchen, in welchen die Unbekannten durch die drei höhern Rechnungsarten verbunden sind z. B.

1) $x^y = 81$;
2) $x^y = 64$;
3) $\sqrt[x]{y} = 3$;

---

*) Aber darum die Aufgabe doch keine völlig unbestimmte wie ohne unsere beschränkende Bedingung, indem ja die Unbekannten nicht alle willkührlichen, sondern nur gewisse, also besondere Werthe annehmen können.

4) $\sqrt[x]{y} = 2$;

5) $\sqrt[2x]{3y} = 2$.

In 1) ist nur Ein Werth von x und Einer von y möglich, nemlich $x = 3$ und $y = 4$, indem nur $3^4 = 81$;

in 2) sind wohl mehrere Werthe von x und y möglich, aber immerhin eine beschränkte Zahl. Es kann nemlich

1) $x = 2$ und $y = 6$ sein, denn $2^6 = 64$;
2) $x = 4$ „ $y = 3$ „ „ $4^3 = 64$;
3) $x = 8$ „ $y = 2$ „ „ $8^2 = 64$;
4) $x = 64$ „ $y = 1$ „ „ $64^1 = 64$.

In 3) ist die Anzahl der korrespondirenden Werthe unbeschränkt,

nemlich bei $x = 1, y = 3$ ist $\sqrt[1]{3} = 3$,

„ $x = 2, y = 9$ „ $\sqrt[2]{9} = 3$,

„ $x = 3, y = 27$ „ $\sqrt[3]{27} = 3$, u. s. w.,

so daß x alle Zahlen von 1 ins Unendliche, y aber alle Potenzen von 3, von der 1ten angefangen bis in's Unendliche, darstellen kann.

In 4) entsprechen der Gleichung die korrespondirenden Werthe:

$x = 1$ und $y = 1$, indem $\sqrt[1]{1} = 2$;

$x = 2$ „ $y = 4$, „ $\sqrt[2]{4} = 2$;

$x = 3$ „ $y = 9$, „ $\sqrt[3]{9} = 2$;

$x = 4$ „ $y = 16$, „ $\sqrt[4]{\underline{16}} = 2$ u. s. w.,

so daß x wieder durch alle Zahlen von 1 bis in's Unendliche, y aber durch die zweiten Potenzen aller Zahlen von 1 bis in's Unendliche ausgedrückt werden kann.

In der etwas weniger einfachen Gleichung 5) kann

$x = 3, y = 12$ sein, indem $\sqrt[2.3]{\underline{3.12}} = \sqrt[6]{\underline{36}} = 2$;

$x = 6, y = 48$ „ „ $\sqrt[2.6]{\underline{3.48}} = \sqrt[12]{\underline{144}} = 2$;

$x = 9, y = 108$ „ „ $\sqrt[2.9]{\underline{3.108}} = \sqrt[18]{\underline{324}} = 2$;

$x = 12, y = 192$ „ „ $\sqrt[2.12]{\underline{3.192}} = \sqrt[24]{\underline{576}} = 2$ u. s. w.,

so daß x durch alle Vielfachen von 3, y aber durch alle die Zahlen ausdrückbar ist, welche durch Multiplikation der Quadrate der geraden Zahlen mit 3 entstehen.

§. 97.

Nachdem wir im Vorhergehenden gesehen, daß durch die beschränkende Bedingung von ganzen und positiven Werthen der Unbekannten die vorher gänzlich unbestimmte Gleichung auf eine mehr oder weniger beschränkte Anzahl von gewissen (also nicht mehr ganz unbestimmten) korrespondirenden Werthen zurückgeführt werde, haben wir jetzt zu untersuchen, welchen Weg man einzuschlagen habe, um den Umfang dieser Werthe mit Bestimmtheit darzulegen. Lassen wir hiebei die Gleichungen, in welchen die Unbekannten in den drei höhern Funktionen vorkommen, außer Acht, so hat eine solche unbestimmte Gleichung, sobald sie gereinigt ist, immer die Form:

$$ax + by = c,^{*})$$

wo a und b jede mögliche ganze, positive oder negative Zahl, c aber außerdem auch noch $= 0$ sein kann. Uebrigens soll diese allgemeine Gleichung hier bloß andeuten, auf welche Formen der unbestimmten Gleichung unsere jetzt zu entwickelnde Methode der Auflösung Anwendung finde, während diese Entwicklung selbst natürlich nur an einer numerischen Gleichung durchgeführt werden kann. Zu dem Zwecke setzen wir denn eine solche, und zwar sei

$$8x + 13y = 207.$$

Man löse nun zunächst die Gleichung in Bezug auf diejenige Unbekannte, welche den kleinsten Coëffizienten bei sich hat, wobei man erhält:

$$x = \frac{207 - 13y}{8}$$

$$= 25 + \frac{7}{8} - y - \frac{5y}{8},$$

$$1)\quad x = 25 - y - \frac{5y - 7}{8}.$$

---

*) Gleichungen von der Form $xy = a$, welche Form in der angegebenen nicht enthalten, lassen auch nicht die allgemeine Behandlung zu, um welche es sich hier handelt.

Zur weitern Bestimmung von x dient nun eben unsere allgemeine Bedingung, daß sowohl x als y ganze (positive) Zahlen sein sollen. Es ist aber, y ohnehin als ganze Zahl vorausgesetzt, x nach seinem obigen Werthe nur dann auch eine solche, wenn $\frac{5y-7}{8}$ eine ganze Zahl darstellt. Bezeichnen wir diese ganze Zahl mit A, so erhalten wir die zweite Gleichung:

$$\frac{5y-7}{8} = A,$$

$$\text{woraus } 5y = 8A + 7,$$

$$y = A + \frac{3A}{5} + 1 + \frac{2}{5},$$

$$2) \quad y = A + 1 + \frac{3A+2}{7}.$$

Damit aber y ebenfalls eine ganze Zahl sei, muß der neue Quotient $\frac{3A+2}{5}$ eine solche, etwa $= B$ sein, womit wir denn die dritte Gleichung erhalten:

$$\frac{3A+2}{5} = B,$$

$$\text{woraus } 3A = 5B - 2,$$

$$3) \quad A = B + \frac{2B-2}{3}.$$

Aber A muß nicht minder eine ganze Zahl, mithin in einer vierten Gleichung

$$\frac{2B-2}{3} = C \text{ sein},$$

$$\text{aus welcher } 2B = 3C + 2,$$

$$4) \quad B = C + 1 + \frac{C}{2}.$$

Endlich ist, damit auch B wieder eine ganze Zahl sei, in einer fünften Gleichung

$$\frac{C}{2} = D,$$

$$\text{woraus } 5) \quad C = 2D.$$

Aus diesen fünf Gleichungen nun mit sechs Unbekannten stellt man (durch Substitution) zwei Gleichungen für x und y her, welche außer diesen Unbekannten nur noch die willführliche Zahl D enthalten, durch welche aber x und y durchaus als ganze Zahlen dargestellt sind.

Was übrigens den Werth von D anbelangt, so liegt hinsichtlich seiner an und für sich keine andere Beschränkung vor, als daß D eine ganze Zahl sein muß, ob positiv oder negativ, ist an sich gleichgiltig; jedoch findet er sich mittelbar weiter noch dadurch beschränkt, daß D nur solche Werthe haben kann, bei welchen sowohl x als y positive Zahlen bleiben.

Nehmen wir die oben angedeutete Entwicklung durch Substitution nun wirklich vor, so haben wir:

in 4) $B = 2D + 1 + D = 3D + 1$;
in 3) $A = 3D + 1 + 2D = 5D + 1$;
in 2) $y = 5D + 1 + 1 + 3D + 1 = 8D + 3$;
in 1) $x = 25 - (8D + 3) - (5D + 1) = 21 - 13D$.

Aus diesen beiden letzten Gleichungen entwickeln wir nun die möglichen korrespondirenden Werthe von x und y, indem wir für D alle die negativen und positiven Werthe setzen, die es annehmen kann, ohne daß x und y negativ werden.

Würden wir nun, um damit den Anfang zu machen, D etwa negativ annehmen, indem wir $D = -1$ setzten, so erhielten wir für B den Werth $-8 + 3 = -5$, welcher als negativ nicht zuläßig ist, und dadurch anzeigt, daß hier D einen negativen Werth nicht haben könne. Nun sei aber

1) $D = 0$, so ist $x = 21$, $y = 3$;
2) $D = 1$, „ „ $x = 8$, $y = 11$;
3) $D = 2$, „ „ $x = -5$, $y = 19$, welche dritten korrespondirenden Werthe schon nicht mehr möglich sind (wegen $x = -5$), so daß sich für unsere Gleichung nur zwei Paare korrespondirender Werthe herausstellen. Machen wir die Probe, so ist in der That

1) $8 \cdot 21 + 13 \cdot 3 = 168 + 39 = 207$;
2) $8 \cdot 8 + 13 \cdot 11 = 64 + 143 = 207$.

Den Fall einer unbeschränkten Anzahl von korrespondirenden Werthen bietet uns das folgende Beispiel:

$$16x - 7y = 33.$$

Hieraus erhalten wir:

$$y = \frac{16x - 33}{7},$$

$$1)\quad y = 2x - 4 + \frac{2x - 5}{7}.$$

Es ist nun wieder:

$$\frac{2x-5}{7} = A,$$

woraus 2) $x = 3A + 2 + \frac{A+1}{2}$;

ferner $\frac{A+1}{2} = B$,

daher 3) $A = 2B - 1$.

Nun substituirt, erhalten wir:

in 2) $x = 3(2B-1) + 2 + B = 7B - 1$;

in 1) $y = 2(7B-1) - 4 + 2B - 1 = 16B - 7$.

Suchen wir nun die möglichen korrespondirenden Werthe, so sehen wir sogleich, daß wir B weder negativ noch $= 0$ setzen können, weil in beiden Fällen sowohl x als y negativ würde. Hingegen kann B alle beliebigen positiven Werthe von 1 bis in's Unendliche annehmen, so daß sich also auch für x und y eine unbeschränkte Anzahl korrespondirender Werthe ergibt.

Ist nemlich $B = 1$, so $x = 6$, $y = 9$;

$B = 2$, „ $x = 13$, $y = 25$;

$B = 3$, „ $x = 20$, $y = 41$ u. s. w.

Ein wohl zu beachtender Fall ist der, daß die Coëffizienten der beiden Unbekannten einen gemeinschaftlichen Faktor haben, welchen nicht zugleich auch das dritte Glied enthält. Es ist nemlich, wie aus dem Folgenden erhellt, in diesem Falle die Lösung in ganzen Zahlen unmöglich.

Z. B. $6x - 9y = 4$.

Wir erhalten:

1) $6x = 9y + 4$,

$$x = y + \frac{3y+4}{6},$$

2) $\frac{3y+4}{6} = A$,

$3y = 6A - 4$,

$y = 2A - 1 - \frac{1}{3}$.

Da nun A eine ganze Zahl ist, damit eben x auch eine sei, so ist $2A - 1$ ebenfalls eine ganze Zahl, aber gerade darum y

unmöglich eine solche, weil es sich als Summe aus einer ganzen Zahl und einem Bruche darstellt.

Endlich betrachten wir noch den Fall, daß das dritte Glied c unserer allgemeinen Gleichung $= 0$ sei; z. B. $3x - 14y = 0$.

Es ist 1) $3x = 14y$,

$$x = 4y + \frac{2y}{3};$$

$$2)\ \frac{2y}{3} = A,$$

$$2y = 3A,$$

$$y = A + \frac{A}{2};$$

$$3)\ \frac{A}{2} = B,$$

$$A = 2B.$$

Wird substituirt, so erhalten wir:

in 2) $y = 2B + B = 3B$;

in 1) $x = 4 \cdot 3B + 2B = 14B$.

Hier können wir wieder B weder negativ noch $= 0$ setzen; hingegen kann es alle möglichen positiven Werthe annehmen, von 1 bis in's Unendliche, woraus sich denn auch für x und y eine unbeschränkte Anzahl von korrespondirenden Werthen ergibt, nemlich

bei $B = 1$ ist $x = 14$, $y = 3$;

„ $B = 2$ „ $x = 28$, $y = 6$;

„ $B = 3$ „ $x = 42$, $y = 9$ u. s. w.

Eine hieher gehörige arithmetische Aufgabe ist die folgende (und natürlich alle ähnlichen):

Welche Zahl gibt

1) durch 3 dividirt 1 zum Reste,
2) „ 4 „ 2 „ „
3) „ 5 „ 3 „ „
4) „ 7 „ 4 „ „?

Es sei x die fragliche Zahl, so ist gemäß 1):

$\frac{x}{3} = A + \frac{1}{3}$, woraus 1) $x = 3A + 1$; aber gemäß 2) ist

$\frac{x}{4} = B + \frac{2}{4}$, daher 2) $x = 4B + 2$.

Aber diese Gleichungen sollen nicht bloß jede für sich, sondern beide zugleich bestehen, wir müssen sie also in eine vereinigen, wodurch wir erhalten:

$$3A + 1 = 4B + 2,$$

$$A = \frac{4B+1}{3} = B + \frac{B+1}{3} = B + C,$$

$$\text{aber } \frac{B+1}{3} = C,$$

$$B = 3C - 1;$$

diesen Werth von B in die Gleichung des Werthes von x substituirt, gibt

$$1') \quad x = 4(3C-1) + 2 = 12C - 2;$$

welche Gleichung nun den Forderungen 1) und 2) zugleich entspricht. Aber nach 3) ist ferner

$$\frac{x}{5} = D + \frac{3}{5},$$

$$\text{oder } 3) \quad x = 5D + 3.$$

Da diese neue Gleichung für x mit der aus 1) und 2) erhaltenen 1') zugleich bestehen muß, so müßen beide wieder in Eine vereinigt werden. Diese ist:

$$5D + 3 = 12C - 2,$$

$$\text{woraus } 5D = 12C - 5,$$

$$D = 2C - 1 + \frac{2C}{5} = 2C - 1 + E;$$

$$\text{aus } \frac{2C}{5} = E \text{ ergibt sich}$$

$$C = 2E + \frac{E}{2} = 2E + F,$$

$$\text{und aus } \frac{E}{2} = F,$$

endlich $E = 2F$, wornach

$$C = 2 \cdot 2F + F = 5F.$$

Diesen Werth von C in 1') substituirt, erhalten wir:

$$2') \quad x = 12 \cdot 5F - 2 = 60F - 2.$$

Endlich gibt uns die vierte Bedingung, welche die fragliche Zahl auch noch zu erfüllen hat, eine vierte ursprüngliche Gleichung an die Hand, nemlich:

$$\frac{x}{7} = G + \frac{4}{7}, \text{ woraus } 4) \quad x = 7G + 4;$$

diese Gleichung 4) wieder mit 2′) vereinigt gibt:

$$7G + 4 = 60C - 2,$$

woraus $7G = 60C - 6,$

$$G = 8C + \frac{4C-6}{7} = 8C + H.$$

Aus $\frac{4C-6}{7} = H$ folgt

$$C = \frac{7H+6}{4} = H + 1 + \frac{3H+2}{4} = H + 1 + I;$$

aber $\frac{3H+2}{4} = I$

gibt $H = I + \frac{I-2}{3} = I + K,$

endlich aus $\frac{I-2}{3} = K$ folgt $I = 3K + 2.$

Substituiren wir nach einander in die vorausgehenden Gleichungen von H und C, und endlich in 1′), so erhalten wir:

$$H = 3K + 2 + K = 4K + 2;$$
$$C = (4K + 2) + 1 + (3K + 2) = 7K + 5;$$
$$x = 60(7K + 5) - 2,$$

woraus wir die letzte abgeleitete Gleichung, die allen gegebenen Bedingungen zugleich genügt, erhalten in:

$$3') \quad x = 420K + 298.$$

Negativ darf hier K nicht werden, weil sonst auch x negativ würde; aber von 0 bis in's Unendliche kann es alle positiven Werthe annehmen, und die Gleichung somit eine unbeschränkte Anzahl solcher Zahlen liefern, welche den oben ausgesprochenen Bedingungen genügen. Ist nemlich $K = 0$, so $x = 298;$
$K = 1$, „ $x = 718;$
$K = 2$, „ $x = 1138$, u. s. w.

In der That ist:

1) $\frac{298}{3} = 99\frac{1}{3}$; $\frac{718}{3} = 239\frac{1}{3}$; $\frac{1138}{3} = 379\frac{1}{3}$, u. s. w.;

2) $\frac{298}{4} = 74\frac{2}{4}$; $\frac{718}{4} = 179\frac{2}{4}$; $\frac{1138}{4} = 284\frac{2}{4}$, u. s. w.;

3) $\frac{298}{5} = 59\frac{3}{5}$; $\frac{718}{5} = 143\frac{3}{4}$; $\frac{1138}{5} = 227\frac{3}{5}$, u. s. w.;

4) $\frac{298}{7} = 42\frac{4}{7}$; $\frac{718}{7} = 102\frac{4}{7}$; $\frac{1138}{7} = 164\frac{4}{7}$, u. s. w.

Zum Schluße wollen wir noch eine Gleichung mit drei Unbekannten vornehmen, um zu zeigen, wie man auch hier der noch größern Unbestimmtheit ungeachtet dennoch einen bestimmten Weg einschlagen könne, die möglichen korrespondirenden Werthe zu ermitteln. Die Gleichung sei:

$$3x + 4y + 5z = 92.$$

Suchen wir wieder den Werth derjenigen Unbekannten, welche den kleinsten Coëffizienten hat, so ist

$$x = \frac{92 - 4y - 5z}{3},$$

$$x = \frac{90 + 2 - 3y - y - 6z + z}{3},$$

$$x = 30 - y - 2z + \frac{z + 2 - y}{3}.$$

Setzen wir nun $\frac{z + 2 - y}{3} = A$,

so haben wir: $z + 2 - y = 3A$,

woraus 1) $y = z + 2 - 3A$;

ferner $x = 30 - (z + 2 - 3A) - 2z + A$,

woraus 2) $x = 28 + 4A - 3z$.

Sollen nun x und y nicht von zwei andern Unbekannten z und A zugleich, sondern wie in den unbestimmten Gleichungen mit zwei Unbekannten jede nur von Einer abhängig sein, so müssen wir zunächst bestimmte Werthe für A setzen. Bei jedem solchen bestimmten Werthe für A erhalten wir für x und y Gleichungen, welche nur mehr von z abhängig sind. Wählt man nun in diesen Gleichungen für z die möglichen Werthe, so erhält man eine Gruppe korrespondirender Werthe der drei Unbekannten, welche gerade bei diesem bestimmten Werthe von A möglich sind, während jeder andere bestimmte Werth von A eine andere Gruppe solcher Werthe gibt.

In unserm Beispiele haben wir 13 solcher Gruppen, indem A so viele Werthe, nemlich von -6 bis $+6$ alle, annehmen kann, hingegen sowohl bei $A = -7$ als bei $A = 7$ für unsere Unbekannten sich Werthe ergeben, welche unserer Hauptbedingung nicht entsprechen. Es wäre nemlich, wenn $A = -7$,

$$y = z + 2 + 21 = z + 23;$$

$$x = 28 - 28 - 3z = -3z,$$

welcher Werth von x mit jeder positiven Annahme für z negativ wird.

Ist aber $A = 7$,

so $y = z + 2 - 21 = z - 19$;

$x = 28 + 28 - 3z = 56 - 3z$.

Setzen wir hier für z auch den kleinsten Werth, den es haben kann, damit y noch positiv werde, nemlich $z = 20$, wobei $y = 20 - 19 = 1$, so wird $x = 56 - 60 = -4$, also negativ.

Führen wir einige Gruppen korrespondirender Werthe aus, so sei:

1) $A = -6$.

Damit wird $y = z + 2 + 18 = z + 20$;

$x = 28 - 24 - 3z = 4 - 3z$.

Hier kann z bloß $= 1$ sein, weil bei jedem höhern Werthe, den z annehmen würde, x offenbar negativ würde; die korrespondirenden Werthe dieser Gruppe sind also:

$z = 1$, $y = 21$, $x = 1$.

Es ist in der That

$3 . 1 + 4 . 21 + 5 . 1 = 3 + 84 + 5 = 92$.

2) Bei $A = -5$ ist

$y = z + 2 + 15 = z + 17$,

$x = 28 - 20 - 3z = 8 - 3z$.

Hier sind zwei Werthe von z möglich, nemlich $z = 1$ und $z = 2$, aber nicht mehr, denn sobald $z = 3$, wird $x = -1$.

Die möglichen korrespondirenden Werthe dieser Gruppe sind also:

$z = 1$, $y = 18$, $x = 5$;

$z = 2$, $y = 19$, $x = 2$,

welche Werthe in der That die gegebene Gleichung wahr machen; denn es ist

sowohl $3 . 5 + 4 . 18 + 5 . 1 = 15 + 72 + 5 = 92$,

als auch $3 . 2 + 4 . 19 + 5 . 2 = 6 + 76 + 10 = 92$.

3) Ist $A = -4$, so erhält man:

$y = y + 2 + 12 = z + 14$,

$x = 28 - 16 - 3z = 12 - 3z$,

wobei drei Werthe für z möglich sind, nemlich $z = 1$, $= 2$, $= 3$, nicht aber $z = 4$, weil sonst $x = 0$ würde, was, wenn wir nur wirkliche Zahlen als Werthe gelten lassen, unzulässig ist.

Die Menge der möglichen korrespondirenden Werthe in einer Gruppe nimmt, wie wir sehen, mit A zu, jedoch nur

bis $A = 0$, von da an aber ebenso wieder ab, wie aus dem Folgenden erhellt:

4) Für $A = 0$ haben wir:
$y = z + 2$,
$x = 28 - 3z$,
wobei 9 Werthe für z möglich sind, nemlich alle von $z = 1$ bis $z = 9$.

5) $A = 4$ gibt
$y = z + 2 - 12 = z - 10$,
$x = 28 + 16 - 3z = 44 - 3z$.
Der kleinste Werth von z, bei welchem y noch positiv bleibt, ist
$z = 11$; dann ist $y = 1$, $x = 11$;
bei $z = 12$ wird $y = 2$, $x = 8$;
„ $z = 13$ „ $y = 3$, $x = 5$;
„ $z = 14$ „ $y = 4$, $x = 2$;
bei $z = 15$ würde $x = -1$, was nicht mehr zulässig ist.

6) Ist $A = 5$, so wird
$y = z + 2 - 15 = z - 13$,
$x = 28 + 20 - 3z = 48 - 3z$.
Der kleinste hier mögliche Werth von z ist gemäß der ersten Gleichung 14, weil bei jedem kleinern $y = 0$ oder negativ würde; der größte Werth aber, den z gemäß der zweiten Gleichung annehmen kann, ist $z = 15$, denn bereits bei $z = 16$ wird $x = 0$. Es sind also hier nur mehr zwei Werthe von z möglich.

7) Bei $A = 6$ endlich
wird $y = z + 2 - 18 = z - 16$,
$x = 28 + 24 - 3z = 52 - 3z$.
Der einzige hier mögliche Werth von z ist 17, weil die erste Gleichung jeden Werth unter, die zweite jeden über 17 ausschließt.

B. Höhere Gleichungen.

§. 98.

In §. 93. haben wir von Gleichungen gesprochen, in welchen die Unbekannte nicht durch bloße Anwendung der entgegengesetzten Rechnungsarten aus ihren Verbindungen gesondert dargestellt werden könne, sondern nur durch gewisse andere Mittel. Als solche Gleichungen haben wir im Allgemeinen alle diejenigen bezeichnet, welche die Unbekannte in verschiedenen nicht summirbaren Funktionen enthalten. Alle hier denkbaren Formen von solchen Gleichungen zu geben, wäre so überflüssig als es unmöglich ist; es genügt zu sagen, daß alle, wie geformt sie ursprünglich auch seien, so geformt werden müssen, daß ihre Glieder bloße Produkte aus den verschiedenen Potenzen der Unbekannten und aus bekannten Zahlen sind. Wie diese Umformungen zu bewerkstelligen seien, darüber lassen sich, weil keine allgemeinen Formen solcher Gleichungen vorliegen, eben auch keine allgemeinen Regeln geben. Häufig macht sich die verlangte Form schon dadurch, daß man anbefohlene Multiplikationen wirklich ausführt, wie in $\frac{3x}{2} \times \frac{x-5}{4} \times \frac{x+6}{7} = 18$, oder wenn man die Divisoren wegschafft, z. B. in $\frac{2}{x-3} + \frac{5}{6x+4} = \frac{8}{9x-10}$, oder auch wenn man Wurzeln hinwegschafft, anbefohlene Potenzirungen wirklich vornimmt, u. dgl.; allein manchmal reicht man damit nicht aus, und man muß Substitutionen vornehmen, wie die im §. 93, wo wir $\sqrt[3]{x+a} = y^2$ und hienach $\sqrt[2]{x+a} = y^3$ setzten, um die Gleichung $m\sqrt[3]{x+a} = b - n\sqrt[2]{x+a}$ in $my^2 = b - ny^3$ umzuformen.

Hat man nun aber die verlangte Umformung gemacht und ferner die Glieder nach den Exponenten der Unbekannten geordnet, so zwar, daß die Gleichung mit der höchsten Potenz derselben beginnt, so hat eine solche Gleichung immer die Form:

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots . Mx^2 + Nx = P,$$

wobei diese Coëffizienten A, B, C ... M, N, P sowohl positiv als negativ und theilweise auch $= 0$ sein können.

Aus dieser allgemeinen Form ergeben sich die möglichen besondern Formen, wenn wir statt n bestimmte Zahlen setzen, nemlich:

1) Wenn $n = 2$, erhalten wir:

$$Ax^2 + Bx = C,$$

welche Gleichung eine des zweiten Grades oder eine quadratische heißt. Hier kann keiner der Coëffizienten $= 0$ sein; denn

a) wäre $A = 0$, so wäre die Gleichung $Bx = C$ eine des ersten Grades, von denen hier keine Rede ist;

b) wäre $B = 0$, so wäre zwar $Ax^2 = C$ das, was man eine reine quadratische Gleichung zu nennen pflegt; allein die Auflösung dieser Gleichung erfordert keine andern Mittel, als die uns aus §. 93 bereits bekannten, und somit gehört dieselbe nicht eigentlich zu den höhern Gleichungen;

c) wäre endlich $C = 0$, so ließe sich $Ax^2 + Bx = 0$ in allen Gliedern durch x dividiren, wodurch wir $Ax + B = 0$, also wieder eine Gleichung des ersten Grades erhielten.

2) Ist $n = 3$, so haben wir die Gleichung:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx = D,$$

welche eine des dritten Grades oder eine kubische genannt wird. Hier kann wieder weder A noch $D = 0$ sein, wohl aber B oder C, jedoch nicht beide zugleich; wäre nemlich

a) $A = 0$ oder $D = 0$, so ginge, wie man leicht einsieht, die Gleichung in eine quadratische über;

b) wäre aber sowohl $B = 0$ als auch $C = 0$, so wäre die Gleichung $Ax^3 = D$ eine sogenannte reine kubische Gleichung, welche eben so wenig als die reine quadratische eigentlich zu den höhern Gleichungen gehört.

3) Ist $n = 4$, so heißt die Gleichung

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx = E$$

eine des vierten Grades oder eine biquadratische. Was hier die Coëffizienten betrifft, so können abermals weder A noch $E = 0$ sein, wohl aber die übrigen drei sowohl einzeln als auch paarweise, nicht aber alle drei zugleich, wofür man sich die Gründe nach dem Obigen leicht selbst angeben kann.

In derselben Weise könnte man die Aufstellung besonderer

Gleichungen des fünften, sechsten ꝛc. Grades noch weiter fortsetzen; da sich jedoch die Elementar-Mathematik speziell bloß mit der Auflösung der quadratischen und kubischen Gleichungen befaßt, und für die Auflösung der höhern Gleichungen sich auf allgemeine hieraus geschöpfte Andeutungen beschränkt, so ist eine weitere Aufzählung solcher Gleichungen hier gänzlich überflüssig.

Um auf die Mittel der Auflösung der höhern Gleichungen überzugehen, so werden wir deren zweierlei kennen lernen, nemlich

1) allgemeine, welche bei allen Arten derselben Anwendung finden,
2) besondere für besondere (bestimmte) Arten.

Da, wie eben gesagt, nur die Auflösung dieser letztern hier spezieller Zweck ist, während die allgemeine Lösung der höhern Gleichungen bloß nebenbei erörtert wird, so wenden wir uns denn sogleich zu diesen besondern Mitteln und entwickeln sie

a) für die quadratische,
b) für die kubische Gleichung.

a) Quadratische Gleichungen.

§. 99.

Zur Auflösung der quadratischen Gleichungen hat man drei Methoden:

1) die Complirungs-,
2) die Eliminations-,
3) die Zerfällungs-Methode.

ad 1) Auf die Complirungs-Methode führt der einfache Versuch, die Gleichung des zweiten Grades dadurch in eine des ersten zu verwandeln, daß man beide Seiten der gereinigten Gleichung mit 2 radizirt. Dabei zeigt sich's denn, daß auf der ersten Seite zum vollständigen Quadrate noch ein Glied fehlt, welches nun sowohl zu dieser als natürlich auch zur andern Seite addirt wird, worauf die Ausziehung der Quadratwurzel auf beiden Seiten ohne Weiteres vor sich gehen kann. Noch zu bemerken ist, daß, wenn man mit der Ausziehung der Wurzel auch nur anfangen will, das

erste Glied, nemlich das mit dem Quadrate der Unbekannten, ein vollständiges Quadrat sein müsse, weßwegen man noch vor Anwendung dieser Methode mit der Gleichung die dieß bezweckende Aenderung vorzunehmen hat.

Die wirkliche Ausführung des hier Gesagten, wird man aus den folgenden Beispielen, wozu eines mit Buchstaben- und eines mit Ziffer-Zahlen gewählt worden, näher kennen lernen.

Beispiele.

1. $Ax^2 + Bx = C.$

Um das erste Glied in ein vollständiges Quadrat zu verwandeln, hat man die ganze Gleichung mit A zu multipliziren; dieselbe verwandelt sich hiedurch in

$$A^2x^2 + ABx = AC.$$

Nun versucht man aus der ersten Seite die Quadratwurzel zu ziehen, wobei das offenbar fehlende dritte Glied des Quadrates einstweilen durch Punkte angedeutet wird, so daß wir haben:

$$\sqrt[2]{A^2x^2 + ABx + \cdot\cdot\cdot} = Ax + \frac{B}{2}.$$

$$\begin{array}{r} \underline{(-)\ A^2x^2} \\ +\ ABx \\ \hline : \left(2Ax + \frac{B}{2}\right) \\ \hline +\ ABx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 \\ \underline{(-)\qquad (-)} \\ 0 \end{array}.$$

Man hat also, um die Ausziehung der Quadratwurzel vornehmen zu können, zur ersten Seite und somit auch zur zweiten den Ausdruck $\left(\frac{B}{2}\right)^2$ zu addiren. Hiemit wird die Gleichung:

$$A^2x^2 + ABx + \left(\frac{B}{2}\right)^2 = \frac{B^2}{4} + AC.$$

Auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen, erhält man:

$$Ax + \frac{B}{2} = \pm^{*)}\sqrt{\frac{B^2}{4} + AC},$$

$$Ax = -\frac{B}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{B^2 + 4AC},$$

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 + 4AC},$$

wobei natürlich im zweiten Gliede das Zeichen (+) eben so gut wie das Zeichen (—) genommen werden kann, so daß die quadratische Gleichung zwei mögliche Werthe hat.

---

2) $\frac{x}{x-4} + 3 = \frac{60}{x+4}$;

$x(x+4) + 3(x-4)(x+4) = 60(x-4)$,

$x^2 + 4x + 3x^2 - 48 = 60x - 240$,

$4x^2 - 56x = -192$,

$x^2 - 14x = -48$;

$\sqrt{x^2 - 14x + \overset{(49)}{\ldots}} = x - 7$.

x^2

(—)

$-14x$

$:(2x-7)$

$-14x + 49$

(+) (—)

0.

Mithin erhalten wir:

$$x^2 - 14x + 49 = 49 - 48 = 1;$$

die Quadratwurzel ausgezogen gibt:

$$x - 7 = \pm 1;$$

woraus entweder $x = 8$,

oder $x = 6$.

In der That ist

sowohl $\frac{8}{8-4} + 3 = \frac{60}{8+4}$, indem $\frac{8}{4} + 3 = \frac{60}{12}$ oder $5 = 5$,

als auch $\frac{6}{6-4} + 3 = \frac{60}{6+4}$, indem $\frac{6}{2} + 3 = \frac{60}{10}$ oder $6 = 6$.

---

*) Da man aus dem Zeichen des Quadrates keineswegs mit Bestimmtheit auf das der Wurzel schließen kann, so erfordert die Vollständigkeit der Rechnung, daß man immer beide Zeichen (+) und (—) als möglich annehme.

ad 2) Die Eliminations-Methode gründet sich auf die Beobachtung, daß Gleichungen, in denen die Unbekannte nur in der zweiten Potenz vorkommt, d. i. sogenannte reine quadratische Gleichungen ohne weitere Hilfsmittel als die des §. 93. auflösbar sind. Daher zielt das ganze Verfahren dahin ab, die erste Potenz der Unbekannten aus der Gleichung zu eliminiren, oder genauer gesprochen, die gegebene Gleichung durch eine andere zu ersetzen, in welcher diese Elimination vorgenommen werden könne. Dieß Letztere ist aber nur dann möglich, wenn man in der neuen Gleichung den Coëffizienten der ersten Potenz der Unbekannten in der Art mit einer willkürlichen Zahl (m) in Verbindung zu bringen vermag, daß bei irgend einem bestimmten Werthe dieser Zahl (m) der so zusammen gesetzte Coëffizient = 0 wird. Zu dem Ende setzt man die Unbekannte (x) gleich einer andern Unbekannten (y) $\pm$ der willkührlichen Zahl (m) [und zwar +, wenn das zweite Glied der gegebenen Gleichung — hat, und umgekehrt —, wenn es + hat], worauf sich das weitere Verfahren, wie es aus den folgenden Beispielen zu ersehen ist, von selbst ergibt.

Beispiele.

1) $Ax^2 + Bx = C.$

Es sei $x = y - m,$

so ist $Ax^2 = Ay^2 - 2mAy + m^2A,$

$+Bx = \quad\quad By - mB,$

mithin $Ax^2 + Bx = Ay^2 - (2mA - B)y + (m^2A - mB) = C.$

Setzen wir nun den Coëffizienten der ersten Potenz unserer Unbekannten, nämlich $2mA - B = 0$, so ergibt sich aus dieser Gleichung zugleich der Werth, den man für m zu setzen hat, damit jener Coëffizient = 0 werde, nemlich $m = \frac{B}{2A}$. Diesen Werth für m in obige neue Gleichung subſtituirt, erhalten wir folgende:

$$Ay^2 - \left(2A \cdot \frac{B}{2A} - B\right) y + \frac{B^2}{4A^2} \cdot A - \frac{B}{2A} \cdot B = C,$$

woraus $Ay^2 + \frac{B^2}{4A} - \frac{B^2}{2A} = C,$

$$Ay^2 = \frac{B^2}{4A} + C,$$

$$y^2 = \frac{B^2 + 4AC}{4A^2}.$$

Radizirt man hier beiderseits mit 2, so erhält man:

$$y = \pm \frac{1}{2A} \sqrt[2]{B^2 + 4AC},$$

aber $x = y - m = -m + y$,

mithin $x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt[2]{B^2 + 4AC}$, offenbar derselbe Werth, den wir aus der nämlichen Gleichung auch durch die Complirungs-Methode für x gefunden haben.

---

2) $\frac{x^2}{2} = \frac{5x}{2} + 42$.

$x^2 = 5x + 84$,

$x^2 - 5x = 84$.

Es sei $x = y + m$,

so ist $x^2 = y^2 + 2my + m^2$,

$-5x = -5y - 5m$,

mithin $x^2 - 5x = y^2 + (2m - 5)\,y + (m^2 - 5m) = 84$.

Setzt man $2m - 5 = 0$, woraus $m = \frac{5}{2}$, und substituirt man das in die neue Gleichung, so erhält man:

$$y^2 + \frac{25}{4} - \frac{25}{2} = 84,$$

$$y^2 = 84 + \frac{25}{4} = \frac{361}{4},$$

$$\text{und } y = \pm \sqrt{\frac{361}{4}} = \pm \frac{19}{2}.$$

$$\text{Aber } x = y + m = \pm \frac{19}{2} + \frac{5}{2},$$

$$\text{mithin entweder } x = \frac{24}{2} = 12,$$

$$\text{oder } x = -\frac{14}{2} = -7.$$

In der That macht der eine wie der andere Werth die gegebene Gleichung wahr; es ist nemlich:

$$\text{sowohl } \frac{144}{2} = \frac{60}{2} + 42, \text{ nemlich } 72 = 72,$$

$$\text{als auch } \frac{49}{2} = -\frac{35}{2} + 42, \text{ oder } \frac{49}{2} = \frac{84 - 35}{2} = \frac{49}{2}.$$

---

ad 3) Werden alle Glieder einer gereinigten quadratischen Gleichung auf Eine Seite, oder wie man das heißt, die Gleichung auf 0 gebracht, so bilden ihre Glieder ein Aggregat der Art, wie wir sie in §. 39. als dritte Klasse der zerlegbaren Aggregate kennen gelernt haben. Wenn man nun dieses Aggregat nach den dort gegebenen Regeln wirklich zerlegt d. h. in ein Produkt aus zwei Faktoren verwandelt, so ist wie das Aggregat so auch das Produkt $= 0$. Ein Produkt kann aber nur dann $= 0$ sein, wenn einer seiner Faktoren $= 0$ ist. Setzen wir nun, weil wir nicht wissen, welcher von den beiden Faktoren $= 0$ sei, beide nach einander $= 0$, so erhalten wir zwei Gleichungen des ersten Grades mit unserer Unbekannten, aus deren jeder sich denn ein Werth für dieselbe darstellen läßt, so daß die quadratische Gleichung durch diese beiden Gleichungen des ersten Grades gelöst erscheint. Z. B.

$$12x^2 + 29x = 60.$$

Die Gleichung auf 0 gebracht haben wir:

$$12x^2 + 29x - 60 = 0.$$

Dieses Aggregat ist gemäß §. 39. durch Multiplikation einer Summe mit einer Differenz entstanden; suchen wir nun nach den Regeln desselben §. die beiden Faktoren, so sind sie $(3x - 4)$ und $(4x + 15)$. In der That ist $(3x - 4)\ (4x + 15) = 12x^2 + 29x - 60 = 0$.

Aus $(3x - 4)\ (4x + 15) = 0$ folgt aber, daß

$$\text{entweder } 3x - 4 = 0, \text{ woraus } x = \frac{4}{3},$$

$$\text{oder } 4x + 15 = 0, \text{ woraus } x = -\frac{15}{4},$$

welche beiden Werthe denn auch obige Gleichung wahr machen.

Es ist nemlich sowohl $12 \cdot \frac{16}{9} + 29 \cdot \frac{4}{3}$

$$= \frac{64}{3} + \frac{116}{3} = \frac{180}{3} = 60,$$

als auch $12 \cdot \frac{225}{16} + 29 \cdot -\frac{15}{4}$

$$= \frac{675}{4} - \frac{435}{4} = \frac{240}{4} = 60.$$

Aber nicht bloß in solchen Fällen, wo sich die Zerlegung nach §. 39. durch Herstellung der richtigen Faktoren versuchsweise bewerkstelligen läßt, was bei irrationalen oder gar imaginären Werthen von x durchaus nicht möglich wäre, sondern ganz allgemein, die Werthe der Unbekannten mögen sein, welche sie wollen, ist diese Lösung der quadratischen Gleichung durch Zerlegung möglich, wenn wir die Gleichung so ändern, daß das Quadrat der Unbekannten 1 zum Coëffizienten hat. In diesem Falle nemlich haben wir, weil x^2 bloß aus $x \times x$ entsteht, für die beiden ersten Glieder unserer Faktoren [s. §. 39.] weiter keine Coëffizienten zu suchen, sondern es sind nur mehr die beiden zweiten Glieder derselben zu bestimmen. Diese zweiten Glieder können wir dabei ganz allgemein etwa mit p und q bezeichnen, während wir die Zeichen, welche wir ihnen beizugeben haben, nach §. 39. ohnehin kennen, so daß an der formellen Bestimmung der beiden Faktoren hiemit weiter nichts mehr fehlt. Haben wir z. B. die allgemeine Gleichung:

$$Ax^2 + Bx = C;$$

so verwandeln wir sie zuerst in folgende:

$$x^2 + \frac{B}{A} \cdot x - \frac{C}{A} = 0.$$

Dieß Aggregat hat, wie wir wissen, eine Summe und eine Differenz zu Faktoren; die ersten Glieder derselben sind beide x, die zweiten bezeichnen wir einstweilen mit p und q; es ist also

$$x^2 + \frac{B}{A} \cdot x - \frac{C}{A} = (x + p)\ (x - q) = 0.$$

Aus $(x + p)\ (x - q) = 0$ folgt aber, daß

entweder $x + p = 0$, woraus $x = -p$,
oder $x - q = 0$, woraus $x = q$,

womit denn die Gleichung formell gelöst ist.

Um aber p und q auch wirklich aus der gegebenen Gleichung zu bestimmen, haben wir bloß das auszusprechen, was in unserer Voraussetzung, daß $(x + p)$ und $(x - q)$ die richtigen Faktoren des obigen Aggregates sind, eigentlich enthalten ist. Das ist aber nichts Anderes, als daß diese Faktoren miteinander multiplizirt ein Aggregat geben, welches mit dem obigen Aggregate identisch, also Glied für Glied dasselbe ist. Aus diesem Satze schöpfen wir drei

Gleichungen [für je Ein Glied Eine,] von denen die beiden letzten zur Bestimmung von p und q dienen, wie aus der folgenden Durchführung zu ersehen ist.

Wir erhalten nemlich:

$$\begin{array}{r} x + p \\ x - q \\ \hline x^2 + px \\ \quad - qx - pq \\ \hline x^2 + (p - q)\,x - pq; \end{array}$$

bei welcher Summation wir $p > q$ annehmen, weil nur unter dieser Voraussetzung das zweite Glied dieses Aggregates dasselbe Zeichen erhält, welches das zweite Glied im gegebenen Aggregate hat. Hingegen hätten wir $p < q$ angenommen, wenn in unserer Gleichung das zweite Glied das Zeichen (—) hätte.

Da nun die beiden Aggregate Glied für Glied dieselben sind, so ist:

1) $x^2 = x^2$, aus welcher identischen Gleichung natürlich nichts weiter zu folgern ist;

2) $(p - q)\,x = \frac{B}{A} \cdot x$, woraus $p - q = \frac{B}{A}$;

3) $pq = \frac{C}{A}$.

Wenden wir nun auf die beiden letztern Gleichungen, in denen p und q die Unbekannten sind, den Kunstgriff an, welchen wir aus den Beispielen 7 und 8 des §. 95. bereits kennen, so erhalten wir:

aus 2) $p^2 - 2pq + q^2 = \frac{B^2}{A^2}$,

aus 3) $4pq = \frac{4C}{A}$,

mithin $p^2 + 2pq + q^2 = \frac{B^2 + 4AC}{A^2}$,

woraus $p + q = \frac{1}{A} \cdot \sqrt{B^2 + 4AC}$,

aber $p - q = \frac{B}{A}$,

mithin $2p = \frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt{B^2 + 4AC}$, und

$$p = \frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt[2]{B^2 + 4AC},$$

$$2q = -\frac{B}{A} + \frac{1}{A}\sqrt[2]{B^2 + 4AC} \text{ und}$$

$$q = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt[2]{B^2 + 4AC}.$$

Es ist aber entweder $x = -p = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt[2]{B^2 + 4AC},$

$$\text{oder } x = q = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt[2]{B^2 + 4AC},$$

welche beiden Werthe offenbar die nämlichen sind, wie wir sie aus derselben Gleichung auch vermittelst der beiden vorhergehenden Methoden gefunden haben.

§. 100.

Die Werthe, die wir aus unserer allgemeinen Gleichung $Ax^2 + Bx = C$ für x entwickelt haben, können auch dazu dienen, aus irgend einer gegebenen, jedoch bereits gereinigten Gleichung die beiden Werthe von x einfach dadurch herzustellen, daß man in die allgemeinen Werthe von x statt A den Coëffizienten von x^2, statt B den von x und statt C das dritte Glied subsituirt.

Dabei wird vorausgesetzt, daß A in jedem Falle positiv sei, also immer dasselbe Zeichen habe, wie in unserer allgemeinen Gleichung, während B und C auch negativ sein können und dann natürlich in den Werthen von x mit den entgegengesetzten Zeichen gebraucht werden müssen.

Je nach diesen Zeichen und wohl auch nach dem Größen-Verhältniße, welches zwischen den Zahlen A, B und C besteht, gestalten sich offenbar die Werthe von x ganz verschieden: fragt man nun um die bestimmte Art der Abhängigkeit, in welcher dem zu Folge die Letzteren zu den Ersteren stehen, so gibt die folgende Untersuchung darauf die Antwort.

Diese Untersuchung muß nach drei Richtungen geführt werden; man hat nemlich zu zeigen, wie sich aus den Zeichen und aus dem Größen-Verhältniße der Coëffizienten einer gegebenen Gleichung schon im Voraus bestimmen lasse,

1) ob die Werthe der Unbekannten reell oder imaginär, also die Gleichung möglich oder unmöglich sei;

2) ob dieſelben rational oder irrational,
3) ob ſie poſitiv oder negativ ſeien.

ad 1) Betrachten wir die Gleichung:

$$x = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt[2]{B^2 + 4AC},$$

ſo ſehen wir, daß es bloß vom zweiten Theile, nemlich von der Wurzelgröße abhange, ob die Werthe von x reell oder imaginär ſeien: ſie ſind reell, wenn der Radikand der Wurzel poſitiv, aber imaginär, wenn er negativ iſt. Da aber B^2 ſowohl als auch A immer poſitiv ſind, ſo hängt das Zeichen des Radikands eigentlich bloß von C ab. Iſt nemlich

a) C poſitiv, d. h. ſteht das dritte Glied, wie in unſerer allgemeinen Gleichung, auf der zweiten Seite mit (+), ſo kann der Radikand nicht anders als poſitiv, und wird ſohin die Wurzel immer möglich ſein;

b) iſt aber C negativ, d. h. ſteht das dritte Glied auf der zweiten Seite der Gleichung mit (—), womit ſich unſere Wurzel in $\sqrt[2]{B^2 - 4AC}$ verwandelt, ſo kommt es darauf an, ob $B^2 > 4AC$ oder $B^2 < 4AC$. Iſt das Erſtere der Fall, ſo bleibt der Radikand poſitiv und ſomit die Wurzel reell; hingegen wird, wenn $B^2 < 4AC$, der Radikand negativ und damit die Wurzel imaginär. So iſt z. B. die Gleichung $3x^2 - 20x = -45$ unmöglich, weil $20^2 < 4.3.45$ oder $400 < 540$. In der That erhalten wir, wenn wir dieſelbe etwa nach der Complirungs-Methode auflöſen, für x einen imaginären Ausdruck. Es iſt nemlich:

$$9x^2 - 60x = -135,$$
$$9x^2 - 60x + 100 = 100 - 135,$$
$$3x - 10 = \pm\sqrt[2]{-35},$$

woraus $x = \frac{10 \pm \sqrt[2]{-35}}{3}$.

ad 2) Es verſteht ſich von ſelbſt, daß es abermals bloß von der Wurzelgröße $\sqrt[2]{B^2 + 4AC}$ abhange, ob x einen rationalen oder irrationalen Werth habe, und zwar iſt das Erſtere der Fall, wenn $B^2 + 4AC$ ein reines Quadrat, das Letztere, wenn es keines iſt. So iſt in der obigen Gleichung: $12x^2 + 29x = 60$ der

Radikand $29^2 + 4.12.60 = 841 + 2880 = 3721 = (61)^2$ ein reines Quadrat, daher auch die Werthe von x rational waren, nemlich:

$$x = -\frac{29}{24} - \frac{61}{24} = -\frac{90}{24} = -\frac{15}{4},$$

$$\text{oder } x = -\frac{29}{24} + \frac{61}{24} = \frac{32}{24} = \frac{4}{3},$$

welche durch Substitution in den allgemeinen Werth von x erhaltenen Werthe, wie man sieht, die nämlichen sind wie die, welche wir oben durch Zerfällung der auf 0 gebrachten Gleichung erhalten haben.

Hingegen führt die Gleichung

$$2x^2 - 7x = 13$$

auf keine rationalen Werthe von x, weil $7^2 + 4.2.13 = 49 + 104 = 153$ kein reines Quadrat ist. Wollte man auf eine solche Gleichung die Zerfällungs-Methode anwenden, so würde sich die versuchsweise Bestimmung der beiden Faktoren, wie wir sie für die Gleichung: $12x^2 + (29\ x) - 60 = 0$, haben machen können, als unausführbar erweisen.

ad 3) Bei der Untersuchung hinsichtlich der Zeichen, welche die Werthe der Unbekannten haben können, müssen wir die beiden allgemeinen Werthe von x, aus welchen wir unsere Schlüsse zu ziehen haben, gesondert betrachten. Es ist nemlich:

$$x_1 = \frac{-B - \sqrt[2]{B^2 + 4AC}}{2A},$$

$$x_2 = \frac{-B + \sqrt[2]{B^2 + 4AC}}{2A}.$$

a) Ist hier B oder, was dasselbe ist, das zweite Glied der gegebenen Gleichung positiv, so kann x_1 nicht anders als negativ, es muß also dann wenigstens Ein Werth von x negativ sein. Hinsichtlich des zweiten Werthes jedoch kommt es auch noch auf das Zeichen von C an: ist

1) C positiv, so ist offenbar $B < \sqrt[2]{B^2 + 4AC}$, und sonach x_2 oder der zweite Werth von x positiv;

2) ist aber C negativ, so ist $B > \sqrt[2]{B^2 - 4AC}$, und damit auch x_2, also jetzt beide Werthe von x negativ.

b) Wenn B negativ ist, so gehen die beiden Werthe in folgende über:

$$x_1 = \frac{B - \sqrt[2]{B^2 + 4AC}}{2A},$$

$$x_2 = \frac{B + \sqrt[2]{B^2 + 4AC}}{2A},$$

wobei denn augenscheinlich der zweite Werth von x nie anders als positiv sein kann. Aber der erste Werth hängt hinsichtlich seines Zeichens von dem Zeichen ab, welches C hat. Ist nemlich

1) C positiv, so ist $B < \sqrt[2]{B^2 + 4AC}$, und somit x_1 oder der erste Werth von x negativ;

2) wenn aber C negativ, so wird $B > \sqrt[2]{B^2 - 4AC}$, und dann ist auch x_1 also jetzt beide Werthe von x positiv.

Dieselben Folgerungen unter den nemlichen Voraussetzungen ergeben sich auch unmittelbar aus der allgemeinen Gleichung, wenn wir dieselbe auf 0 bringen und zerlegen. Ist nemlich

1. B positiv und C positiv, wie oben bei a) 1), so haben wir die allgemeine Gleichung:

$$x^2 + \frac{B}{A} \cdot x - \frac{C}{A} = 0,$$

welche nach §. 39. 3. c) in folgende Produkten-Gleichung übergeht:

$$(x + p)(x - q) = 0,$$

woraus $x_1 = -p$, $x_2 = q$, also wie oben ein negativer und ein positiver Werth.

2. In a) 2) war B positiv, aber C negativ; in diesem Falle haben wir folgende Gleichung:

$$x^2 + \frac{B}{A} : x + \frac{C}{A} = 0.$$

Diese nach §. 39. 3. a) zerlegt gibt:

$$(x + p)(x + q) = 0,$$

woraus $x_1 = -p$, $x_2 = -q$, also zwei negative Werthe wie oben.

3. Haben wir, wie in b) 1) B negativ, aber C positiv, so ist unsere allgemeine Gleichung:

$$x^2 - \frac{B}{A} \cdot x - \frac{C}{A} = 0,$$

Nach §. 39. 3. c) verwandelt sich diese in

$$(x + p)(x - q) = 0,$$

woraus $x_1 = -p$, $x_2 = q$, also ein negativer und ein positiver Werth wie oben.

4. Ist endlich wie in b) 2) B sowohl als C negativ, so haben wir die Gleichung:

$$x^2 - \frac{B}{A} \cdot x + \frac{C}{A} = 0,$$

welche nach §. 39. 3. b) gibt:

$$(x - p)(x - q) = 0,$$

woraus $x_1 = p$, $x_2 = q$, also zwei positive Werthe abermals wie oben.

Zur Einübung dieser Sätze hier noch ein Paar Beispiele:

1. $6x^2 + 2ab(2x - a) = 3ax + b(3x + 2ab)$.

Auflösung.

$$6x^2 + 4abx - 2a^2b = 3ax + 3bx + 2ab^2,$$
$$6x^2 + 4abx - 3ax - 3bx = 2a^2b + 2ab^2,$$
$$6x^2 + (4ab - 3a - 3b)\,x = 2ab(a + b).$$

1) Die Werthe dieser Gleichung sind reell, weil das dritte Glied $2ab(a + b)$ positiv ist.

2) Es ist $B^2 = 16a^2b^2 - 24a^2b + 9a^2 - 24ab^2 + 18ab + 9b^2$,
$4AC = \quad\quad 48a^2b \quad\quad + 48ab^2$,

mithin $B^2 + 4AC = 16a^2b^2 + 24a^2b + 9a^2 + 24ab^2 + 18ab + 9b^2$,

und $\sqrt[2]{B^2 + 4AC} = 4ab + 3a + 3b$; mithin sind die Werthe auch rational.

3) Weil C positiv ist, wobei es auf das Zeichen von B eigentlich gar nicht mehr ankommt [s. a) 1) und b) 1)], so hat die Gleichung einen positiven und einen negativen Werth. Es ist in der That

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt[2]{B^2 + 4AC}}{2A} = \frac{\overset{(-)}{-}(4ab - 3a - 3b) \overset{(+)}{+} (4ab + 3a + 3b) \overset{(+)}{}}{12} =$$
$$= \frac{6a + 6b}{12} = \frac{a + b}{2}, \text{ der positive Werth von } x;$$

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt[2]{B^2 + 4AC}}{2A} = \frac{-(4ab - 3a - 3b) - (4ab + 3a + 3b)}{12} =$$
$$= \frac{-8ab}{12} = -\frac{2ab}{3}, \text{ der negative Werth von } x.$$

Die Probe zur Uebung!

2. $3\sqrt[2]{216-5x} = 13+2\sqrt[2]{81+x}$.

Wenn wir, um die Wurzeln wegzuschaffen, beide Seiten quadriren, so erhalten wir:

$$9(216-5x) = 169+52\sqrt[2]{81+x}+4(81+x).$$

Die zweite Seite enthält, wie man sieht, noch immer eine Wurzel; diese wird durch abermaliges Quadriren jedoch nur dann entfernt, wenn sie zuvor allein gestellt ist. Wir haben daher:

$$1944-45x-169-324-4x = 52\sqrt[2]{81+x},$$
$$1451-49x = 52\sqrt[2]{81+x},$$
$$2105401-142198x+2401x^2 = 2704(81+x)$$
$$= 219024+2704x,$$
$$2401x^2-144902x = -1886377.$$

Da hier C negativ, so läßt sich nicht eher bestimmen, ob die Werthe reell oder imaginär sind, als bis wir B^2-4AC entwickelt haben. Es ist aber

$$B^2 = 20996589604,$$
$$-4AC = -18116764708,$$
$$B^2-4AC = +2879824896,$$

mithin sind die Werthe reell;

weil aber $\sqrt[2]{B^2-4AC} = \sqrt[2]{2879824896} = 53664$, so sind die Werthe auch rational.

Was endlich die Zeichen der Werthe betrifft, so sind hier beide Werthe positiv, weil sowohl B als C negativ [s. b) 2)]; es ist in der That

$$x_1 = \frac{B-\sqrt[2]{B^2-4AC}}{2A} = \frac{144902-53664}{4802} = \frac{91238}{4802} = 19;$$

$$x_2 = \frac{B+\sqrt[2]{B^2-4AC}}{2A} = \frac{144902+53664}{4802} = \frac{198566}{4802} =$$
$$= \frac{99283}{2401}\left(=41\frac{842}{2401}\right).$$

Machen wir mit beiden Werthen die Probe, so ist

1) a) $3\sqrt[2]{216-95} = 3\sqrt[2]{121} = 3 \cdot 11 = \underline{33}$;

b) $13+2\sqrt[2]{81+19} = 13+2\sqrt[2]{100} = 13+2 \cdot 10 = \underline{33}$.

2) a) $3\sqrt[2]{216-5 \times \frac{99283}{2401}} = 3\sqrt[2]{\frac{22201}{2401}} = 3 \times^{*)} \frac{149}{49} =$

$= -\frac{447}{49} = -\underline{9\frac{6}{49}}$;

b) $13+2\sqrt[2]{81+\frac{99283}{2401}} = 13+2\sqrt[2]{\frac{293764}{2401}} =$

$= 13+2 \times^{*)} \frac{542}{49} = 13-\frac{1084}{49} = 13-22\frac{6}{49} =$

$= -\underline{9\frac{6}{49}}$.

b) Kubische Gleichungen und höhere Gleichungen überhaupt.

§. 101.

Für die Auflösung der kubischen Gleichungen werden gewöhnlich drei Methoden angeführt:

1) eine Art Complirungs-Methode,
2) die Zerfällungs-Methode,
3) die sogenannte Kardans-Regel. **)

Da aber durch die erste dieser Methoden (man versucht dabei aus der ersten Seite der gereinigten Gleichung die Kubikwurzel auszuziehen und sodann aus dem zum reinen Kubus erforderlichen Complemente in Zusammenstellung mit der gegebenen Gleichung auf

---

*) Die Gleichheit der beiden Seiten der Gleichung wird nur dann erzielt, wenn wir beide Wurzeln negativ nehmen, während sie an sich eben so gut positiv sein können. Aus diesem Beispiele, wo wir zur Annahme negativer Wurzeln sogar gezwungen sind, erhellt zugleich, daß die Vorschrift, den Quadratwurzeln immer beide Zeichen ($\pm$) vorzusetzen, keine willkürliche ist.

**) Nach dem Mathematiker Cardanus so benannt, der um die Mitte des 16ten Jahrhunderts in Pavia lehrte.

den Werth von x zu schließen) die Unbekannte keineswegs in bestimmter Weise, sondern nur durch mehrfache Versuche, für welche überdieß nur schwache Anhaltspunkte vorhanden sind, ermittelt wird — die zweite Methode aber gerade so wie bei den kubischen auch bei allen höhern Gleichungen in Anwendung kommt, also der kubischen Gleichung durchaus nicht eigenthümlich ist: so bleibt uns als bestimmte und zugleich für die kubische Gleichung spezifische Auflösungs-Methode bloß die zuletzt angeführte Kardans-Regel übrig.

Die Anwendung dieser Methode ist nur dann möglich, wenn die Gleichung die Form hat:

$$x^3 = Ax + B,$$

welche sich von der allgemeinen Form dadurch unterscheidet, daß

1) der Coëffizient der dritten Potenz der Unbekannten nicht irgend eine beliebige Zahl, sondern 1 ist,
2) daß das Glied mit dem Quadrate der Unbekannten gänzlich fehlt.

Wir müssen also, noch ehe wir die Methode selbst entwickeln, zeigen,

1) wie man den Coëffizienten der dritten Potenz der Unbekannten hinwegzuschaffen habe,
2) wie man die Gleichung umformen müsse, damit das Glied mit der zweiten Potenz der Unbekannten verschwinde.

ad 1) Die einfachste Art, den Coëffizienten von x^3 hinwegzuschaffen, wäre freilich die, daß man alle Glieder der Gleichung durch denselben dividirte; allein dadurch würden die übrigen Coëffizienten alle oder wenigstens einige davon Brüche, was immerhin nicht erwünscht ist. Um nun dieß zu vermeiden, setzt man die Unbekannte gleich einem Quotienten, der aus einer andern Unbekannten und dem hinwegzuschaffenden Coëffizienten besteht. Hat man z. B. die Gleichung:

$$2x^3 - 23x^2 + 35x + 25 = 0,$$

so setzt man $x = \frac{x'}{2}$ und erhält sodann:

$$2 \cdot \frac{x'^3}{8} - 23 \cdot \frac{x'^2}{4} + 35 \cdot \frac{x'}{2} + 25 = 0,$$

$$\text{oder } x'^3 - 23x'^2 + 70x' + 100 = 0,$$

eine Gleichung mit lauter ganzen Coëffizienten.

ad 2) Um zu zeigen, wie man das Glied mit x^2 aus der Gleichung entfernen könne, legen wir die allgemeine Gleichung zu Grunde: $x^3 = Ax^2 + Bx - C = 0.$

Das Verfahren, durch welches wir bei der Eliminations-Methode aus der quadratischen Gleichung das zweite Glied mit x (§. 99) entfernt haben, ist offenbar auch hier anwendbar. Setzen wir also wie dort

$$x = y \pm m,$$

je nachdem $-Ax^2$ oder $+Ax^2$ hinwegzuschaffen ist, so erhalten wir:

$$\begin{array}{rcl} x^3 &=& y^3 \pm 3my^2 + 3m^2y \pm m^3 \\ \mp Ax^2 &=& \mp Ay^2 - 2mAy \mp Am^2, \\ +Bx &=& +By \pm Bm, \\ -C &=& -C; \end{array}$$

$$x^3 \mp Ax^2 + Bx - C = y^3 \mp (A - 3m)y^2 + (3m^2 - 2mA + B)y \mp$$
$$\mp (Am^2 - m^3 - Bm \pm C) = 0.$$

Nun fällt in der Gleichung mit y das zweite Glied hinaus, wenn $A - 3m = 0$, oder was dasselbe ist, wenn $m = \frac{A}{3}$. Man hat also, um die Elimination des zweiten Gliedes der kubischen Gleichung zu bewirken, die gegebene Unbekannte gleich einer andern Unbekannten $\pm \frac{A}{3}$ zu setzen, wenn $\mp A$ der Coëffizient dieses hinweg zu schaffenden Gliedes ist. Führen wir dieses in unserer Gleichung durch, so erhalten wir:

$$y^3 \mp \left(A - 3 \cdot \frac{A}{3}\right)y^2 + \left(3 \cdot \frac{A^2}{9} - 2 \cdot \frac{A}{3} \cdot A + B\right)y \mp$$
$$\mp \left(A \cdot \frac{A^2}{9} - \frac{A^3}{27} - \frac{AB}{3} \pm C\right) = 0,$$
$$y^3 - \left(\frac{A^2}{3} - B\right)y \mp \left(\frac{2A^3}{27} - \frac{AB}{3} \pm C\right) = 0,$$

in welche allgemeine Gleichung man in jedem besondern Falle nur die entsprechenden Werthe von A, B und C substituiren dürfte, um unmittelbar eine Gleichung zu erhalten, in der die zweite Potenz der Unbekannten nicht vorkommt.

Jedoch zieht man es gewöhnlich vor, obige Regel zur Hinwegschaffung des Quadrates der Unbekannten sogleich auf die gegebene Gleichung selbst anzuwenden, wie in folgendem Beispiele:

$$x'^3 - 23x'^2 + 70x' + 100 = 0.$$

Man setze $x' = y + \frac{23}{3}$, so erhält man:

$$x'^3 = y^3 + 23y^2 + \frac{529}{3}y + \frac{12167}{27},$$

$$\begin{aligned} -23x'^2 &= -23y^2 - \frac{2.529}{3}y - \frac{12167}{9}, \\ +70x' &= 70y + \frac{1610}{3}, \\ +100 &= +100; \end{aligned}$$

$$x'^3 - 23x'^2 + 70x' + 100 = y^3 - \frac{319y}{3} - \frac{7144}{27} = 0.$$

Anmerkung. Aus dieser Gleichung kann man übrigens auch die Brüche und dann nach 1) den Coëfficienten von y^3 wieder hinwegschaffen, wie folgt:

$$27y^3 - 2871y - 7144 = 0.$$

Man setze $y = \frac{y'}{3}$, so ist:

$$27 \cdot \frac{y'^3}{27} - 2871 \cdot \frac{y'}{3} - 7144 = 0,$$

$$y'^3 - 957y' - 7144 = 0,$$

womit man denn eine Gleichung hat, welche unter den nach einander gemachten Voraussetzungen $\left[x = \frac{x'}{2};\ x' = y + \frac{23}{3};\ y = \frac{y'}{3}\right]$ eben so wahr ist, wie die gegebene Gleichung: $2x^3 - 23x^2 + 35x + 25 = 0$ selbst, aber welche jetzt auch eine solche Form hat, wie die Anwendung der Kardans-Regel sie erfordert.

§. 102.

Kardans-Regel.

Die Kardans-Regel findet, wie bereits gesagt, ihre Anwendung nur bei Gleichungen von der Form:

$$x^3 = Ax + B.$$

Die Methode besteht nun darin, daß man setzt:

$$\text{I.}\quad x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q},$$

weil man durch diese Setzung, wie wir sogleich sehen werden, für

x^3 eine Gleichung von derselben Form erhält, wie die gegebene ist, woraus hervorgeht, daß die angenommene Form des Werthes von x der Form der gegebenen Gleichung ganz angemessen ist. Man erhält nämlich:

$$x^3 = p + 3\sqrt[3]{p^2q} + 3\sqrt[3]{pq^2} + q,$$

$$\text{oder } x^3 = 3\sqrt[3]{pq}\left(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}\right) + (p+q),$$

$$\text{und da } x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q},$$

$$x^3 = 3\sqrt[3]{pq} \cdot x + (p+q).$$

Aus der Comparation dieser Gleichung mit der gegebenen geht hervor:

$$3\sqrt[3]{pq} \cdot x + (p+q) = Ax + B.$$

Da wir zwei Unbekannte p und q eingeführt, so müssen wir auch eben so viele Setzungen dafür machen, also außer I. noch eine zweite, nemlich

$$\text{II. } 3\sqrt[3]{pq} \cdot x = Ax,$$

$$\text{woraus } 3\sqrt[3]{pq} = A.$$

Setzen wir die durch Comparation erhaltene Gleichung mit II. zusammen, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} 3\sqrt[3]{pq} \cdot x + (p+q) = Ax + B, \\ (-)\qquad\qquad 3\sqrt[3]{pq} \cdot x = Ax, \\ \hline \text{mithin } p + q = B, \end{array}$$

so daß wir nun für unsere 3 Unbekannten x, p und q auch drei Gleichungen haben.

Aus den zwei letztern dieser Gleichungen, welche, wie man sieht, die Unbekannte x nicht enthalten, also aus

$$3\sqrt[3]{pq} = A,$$

$$\text{und } p + q = B,$$

stellen wir die Werthe von p und q vermittelst des schon mehrmals angewendeten Kunstgriffes her; es ist nemlich

$$27pq = A^3,$$

$$pq = \frac{A^3}{27},$$

$$\text{mithin } \underset{(-)}{4pq} = \underset{(-)}{\frac{4A^3}{27}},$$

$$\text{aber } p^2 + 2pq + q^2 = B^2,$$

$$\text{mithin } p^2 - 2pq + q^2 = B^2 - \frac{4A^3}{27},$$

$$\text{oder } p - q = \sqrt[2]{B^2 - \frac{4A^3}{27}};$$

$$\text{hingegen } p + q = B,$$

$$\text{also } 2p = B + \sqrt[2]{B^2 - \frac{4A^3}{27}}, \text{ woraus } p = \frac{B}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{B^2 - \frac{4A^3}{27}},$$

$$2q = B - \sqrt[2]{B^2 - \frac{4A^3}{27}}, \text{ woraus } q = \frac{B}{2} - \frac{1}{2}\sqrt[2]{B^2 - \frac{4A^3}{27}}.$$

Setzt man diese Werthe, nachdem man zuvor den Divisor 2 innerhalb des Wurzelzeichens angebracht hat, für p und q in die Gleichung I, so hat man:

$$x = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt[2]{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt[2]{\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3}}.$$

Hiemit ist denn der Werth der Unbekannten algebraisch festgestellt: allein es kommt noch darauf an, aus dieser irrationalen und, wenn $\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3$ negativ ist, sogar imaginären Form die möglichen rationalen und reellen Werthe herzustellen. Dazu ist es denn vor Allem nöthig, obige dritte Wurzeln wirklich auszuziehen. Da dieß offenbar direkt nicht möglich ist, so müssen wir umgekehrt erst untersuchen, wie man zu solchen dritten Potenzen von der Form, wie wir sie im Werthe von x als Radikande hinter den dritten Wurzeln haben, gelange. Ein Beispiel soll das zeigen:

a) $(3 + \sqrt[2]{2})^3 = 27 + 27\sqrt[2]{2} + 18 + 2\sqrt[2]{2} =$

$= 45 + 29\sqrt[2]{2} = 45 + \sqrt[2]{1682};$

aber $\left(3-\sqrt[2]{2}\right)^3 = 27 - 27\sqrt[2]{2} + 18 - 2\sqrt[2]{2} =$

$= 45 - 29\sqrt[2]{2} = 45 - \sqrt[2]{1682}.$

b) $\left(3+\sqrt[2]{-2}\right)^3 = 27 + 27\sqrt[2]{-2} - 18 - 2\sqrt[2]{-2} =$

$= 9 + 25\sqrt[2]{-2} = 9 + \sqrt[2]{-1250};$

aber $\left(3-\sqrt[2]{-2}\right)^3 = 27 - 27\sqrt[2]{-2} - 18 + 2\sqrt[2]{-2} =$

$= 9 - 25\sqrt[2]{-2} = 9 - \sqrt[2]{-1250}.$

Solche dritte Potenzen von der Form:

a) $U + \sqrt[2]{V}$ und $U - \sqrt[2]{V}$

oder b) $U' + \sqrt[2]{-V'}$ und $U' - \sqrt[2]{-V'}$

entstehen also durch Kubiren von Ausdrücken wie:

a) $u + \sqrt[2]{v}$ und $u - \sqrt[2]{v}$,

oder b) $u' + \sqrt[2]{-v'}$ und $u' - \sqrt[2]{-v'}$, und umgekehrt sind diese letztern Ausdrücke die Kubikwurzeln aus den erstern.

Weil wir aber hieraus sehen, daß unsere $\sqrt[3]{p}$ und $\sqrt[3]{q}$, deren Summe wir x gleichgestellt haben, keine andern dritten Wurzeln sind als solche von der Form: $u + \sqrt[2]{v}$ und $u - \sqrt[2]{v}$, oder $u + \sqrt[2]{-v}$ und $u - \sqrt[2]{-v}$, so reforrigiren wir uns sogleich dahin, daß wir, statt $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ zu setzen, lieber gleich setzen:

$$\text{I.} \begin{cases} \text{a) } x = \left(u + \sqrt[2]{v}\right) + \left(u - \sqrt[2]{v}\right), \\ \text{oder b) } x = \left(u + \sqrt[2]{-v}\right) + \left(u - \sqrt[2]{-v}\right), \end{cases}$$

je nachdem nemlich V, d. i. $\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3$ a) positiv oder b) negativ ist, was denn immer vor der Setzung der Werthe für x zuerst zu ermitteln ist.

Auch durch diese Setzung I erhalten wir für x^3 eine Gleichung von derselben Form wie die gegebene, nemlich

a) $x^3 = [(u + \sqrt[2]{v}) + (u - \sqrt[2]{v})]^3$,

$x^3 = (u + \sqrt[2]{v})^3 + 3(u + \sqrt[2]{v})^2 (u - \sqrt[2]{v}) +$

$+ 3(u + \sqrt[2]{v})(u - \sqrt[2]{v})^2 + (u - \sqrt{v})^3$,

$= (u + \sqrt[2]{v})^3 + (u - \sqrt[2]{v})^3 +$

$+ 3(u + \sqrt[2]{v})(u - \sqrt[2]{v})[(u + \sqrt[2]{v}) + (u - \sqrt{v})]$

$= (u^3 + 3u^2\sqrt[2]{v} + 3uv + v\sqrt[2]{v}) +$

$+ (u^3 - 3u^2\sqrt[2]{v} + 3uv - v\sqrt[2]{v}) + 3(u^2 - v) \cdot x$

$= 2u^3 + 6uv + 3(u^2 - v)\, x,$

also $x^3 = 3(u^2 - v)\, x + (2u^3 + 6uv)$.

b) Iſt v negativ, ſo erhält man:

$x^3 = 3(u^2 + v)\, x + (2u^3 - 6uv)$.

Comparirt man, um mit der Gleichung a) fortzurechnen, indem die Gleichung b) ſich von ihr nur durch die Zeichen von v unterſcheidet, dieſe Gleichung mit der gegebenen, ſo erhält man wieder:

$$3(u^2 - v)\, x + (2u^3 + 6uv) = Ax + B.$$

Machen wir hiezu noch unſere zweite Setzung (weil wir zwei neue Unbekannte eingeführt haben), nemlich:

$$\text{II. } \underset{(-)}{3(u^2 - v)\, x} = \underset{(-)}{Ax}, \text{ ſo erhält man:}$$

$$\text{III. } 2u^3 + 6uv = B.$$

Wollte man die zwei Gleichungen II. und III. in Eine mit Einer Unbekannten zuſammenſetzen, um dieſe daraus zu berechnen, ſo erhielte man immer wieder eine kubiſche Gleichung, um deren Auflöſung es ſich ja eben handelt; auch läßt ſich kein Kunſtgriff anwenden, um zu demſelben Ziele zu gelangen. Allein dieſe Gleichungen laſſen ſich in der Form:

$$\text{II. } u^2 = \frac{A}{3} + v,$$

$$\text{III. } u^3 + 3uv = \frac{B}{2},$$

recht wohl dazu benützen, daraus v und u verſuchsweiſe zu beſtimmen, für welche Verſuche jedoch ſehr beſtimmte und leicht zu ermittelnde Anhaltspunkte vorhanden ſind.

Man hat nemlich v so zu wählen, daß es zu $\frac{A}{3}$ addirt ein reines Quadrat gibt, dessen Wurzel sodann $= u$, und man hat richtig gewählt, wenn nun mit diesen Werthen von u und v auch $u^3 + 3uv = \frac{B}{2}$.

Uebrigens wird auch durch $\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3$ nicht bloß das Zeichen von v bestimmt, sondern v hat zu diesem Ausdrucke auch noch die nähere Beziehung, daß es ein Faktor desselben sein muß, was offenbar für die Kenntniß von v einen neuen Anhaltspunkt gewährt.

Bemerkenswerth ist noch, daß, welche Setzung man für x auch mache, ob $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$ oder ob $x = \left(u + \sqrt[2]{v}\right) + \left(u - \sqrt[2]{v}\right)$, die Werthe dieser Hilfsgrößen immer von den zwei nemlichen Größen $\frac{B}{2}$ und $\frac{A}{3}$ abhängig sind.

Die wirkliche Bestimmung dieser Werthe von u und v, und damit von $x = 2u$ wird man aus den folgenden Beispielen des Nähern ersehen.

Beispiele.

1. Wählen wir zuerst unsere Gleichung aus §. 101., nemlich:

$$y'^3 - 957y' - 7144 = 0,$$

so erhalten wir:

$$y'^3 = 957y' + 7144,$$

in welcher Gleichung die Glieder dieselben Zeichen haben, wie in unserer allgemeinen, so daß

$$A = 957, \quad B = 7144.$$

Mithin ist $\frac{B}{2} = 3572$, $\frac{A}{3} = 319$;

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 = 12759184,$$

$$\overset{(-)}{\left(\frac{A}{3}\right)^3} = \overset{(-)}{32461759},$$

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3 = -19702575,$$

also v negativ.

Es ist daher I. $y' = \left(u + \sqrt[2]{-v}\right) + \left(u - \sqrt[2]{-v}\right)$,

II. $u^2 = 319 - v$,

III. $u^3 - 3uv = 3572$.

1. Wählen wir $u^2 = 1$, so muß $v = 318$ sein, denn $319 - 318 = 1$, aber 318 ist in $V = 19702575$ nicht enthalten;
2. wählen wir $u^2 = 4$, so muß $v = 315$ sein, denn $319 - 315 = 4$, aber $315 = 7 \times 45$ und 7 in V nicht enthalten;
3. wählen wir $u^2 = 9$, so muß $v = 310$ sein, denn $319 - 310 = 9$, aber 310 ist offenbar in V nicht enthalten;
4. wählen wir $u^2 = 16$, so muß $v = 303$ sein, denn $319 - 303 = 16$; da nun 303 wirklich in V enthalten ist, so prüfen wir die hier sich ergebenden Werthe von u und v durch die dritte Gleichung.

Es ist nemlich $u = \pm 4$, $v = 303$;

a) $64 - 3 \,.\, 4 \,.\, 303 = 64 - 3636 = -3572$ (unrichtig),

b) $-64 + 3 \,.\, 4 \,.\, 303 = -64 + 3636 = +3572$ (richtig),

mithin wirklich $u = -4$, und $v = 303$; diese Werthe in I. substituirt, erhalten wir:

$$y' = \left(-4 + \sqrt[2]{-303}\right) + \left(-4 - \sqrt[2]{-303}\right) = -8.$$

Dieses y' war nicht die eigentliche Unbekannte der gegebenen Gleichung des §. (101.); um diese (x) zu erhalten, müssen wir in die dort gesetzten Hilfsgleichungen substituiren.

Dadurch erhalten wir:

1) $y = \frac{y'}{3} = -\frac{8}{3}$;

2) $x' = y + \frac{23}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{23}{3} = \frac{15}{3} = 5$;

3) $x = \frac{x'}{2} = \frac{5}{2}$.

In der That macht dieser Werth von x die Gleichung: $2x^3 - 23x^2 + 35x + 25 = 0$, wahr: es ist nemlich

2. $\left(\frac{5}{2}\right)^3 - 23 \,.\, \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 35 \,.\, \frac{5}{2} + 25 = 2 \,.\, \frac{125}{8} - \frac{23 \,.\, 25}{4} +$

$+ \frac{35 \,.\, 10}{4} + \frac{100}{4} = \frac{125}{4} - \frac{575}{4} + \frac{350}{4} + \frac{100}{4} = \frac{575 - 575}{4} = 0.$

Durch dieses Verfahren erhalten wir für x nur Einen Werth; es ist aber unwahrscheinlich, daß die kubische Gleichung nur Einen Werth für ihre Unbekannte gebe, während die quadrat sche schon deren zwei gibt. In der That läßt sich aus der gegebenen kubischen Gleichung mit Hilfe der gefundenen Werthgleichung von x noch eine quadratische Gleichung ableiten, welche mit der kubischen zugleich wahr ist, und deren zwei mögliche Werthe aus diesem Grunde zugleich mögliche Werthe der kubischen Gleichung sind, so daß demnach die letztere drei mögliche Werthe hat, wie es ihr schon der Analogie zufolge zukömmt.

Würde man nun diese Ableitung der quadratischen Gleichung in der Art machen, daß man die gereinigte kubische Gleichung durch die Gleichung $x = \frac{5}{2}$ dividirte, nemlich

$$2x^3 - 23x^2 + 35x = -25,$$
$$: \quad x = \frac{5}{2},$$

woraus $2x^2 - 23x + 35 = -10$,

so würde diese quadratische Gleichung nur unter der Voraussetzung, daß $x = \frac{5}{2}$, zugleich mit der kubischen wahr sein, aber unter keiner andern; daher können auch aus dieser quadratischen Gleichung, deren Werthe $\frac{5}{2}$ und 9 sind, außer $x = \frac{5}{2}$ keine andern Werthe ermittelt werden, die zugleich auch Werthe der kubischen Gleichung wären, indem, um dasselbe nochmal in einer andern Form zu sagen, die quadratische Gleichung aufhört zugleich mit der kubischen wahr zu sein, sobald x einen andern Werth als $\frac{5}{2}$ haben soll. Auf diesem Wege also kommen wir zu keinem weitern Werthe der kubischen Gleichung.

Das ist aber auch selbst verständlich: sobald $x = \frac{5}{2}$, so hat es durchaus keinen andern Werth, indem ja auch bei der quadratischen Gleichung die zwei möglichen Werthe dieß nicht in dem Sinne sind, daß sie es beide zugleich wären, sondern gerade umgekehrt in dem Sinne, daß es der eine nur dann ist, wenn

es der andere nicht ist. Wollen wir also für unsere kubische Gleichung weitere Werthe suchen, so müssen wir gerade die entgegengesetzte Voraussetzung von der machen, die wir bei obiger Ableitung gemacht haben, nemlich daß nicht $x = \frac{5}{2}$, oder was dasselbe, nicht $x - \frac{5}{2} = 0$, sondern etwa $x - \frac{5}{2} = m$, woraus $2x - 5 = 2m$.

Verbinden wir diese Gleichung mit der kubischen, indem wir setzen:

$$2x^3 - 23x^2 + 35x + 25 = 0,$$
$$: 2x - 5 \qquad = 2m,$$

woraus $x^2 - 9x - 5 = 0$,

$$2x^3 - 23x^2 + 35x + 25 : (2x - 5) = x^2 - 9x - 5$$
$$2x^3 - 5x^2$$
$$(-)\ (+)$$
$$- 18x^2$$
$$- 18x^2 + 45x$$
$$(+)\ (-)$$
$$- 10x$$
$$- 10x + 25$$
$$(+)\ (-)$$
$$0.$$

so ist diese quadratische Gleichung nicht etwa bloß unter Einer Bedingung, sondern allgemein mit der kubischen zugleich wahr, und ihre zwei möglichen Werthe sind daher auch zugleich mögliche Werthe der kubischen Gleichung.

Wir erhalten nemlich:

$$x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 5 = \frac{101}{4},$$

daher $x - \frac{9}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{101}$,

mithin entw. $x = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{101}$,

oder $x = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{101}$.

In der That machen diese beiden Werthe auch die kubische Gleichung wahr; versuchen wir's etwa mit dem ersten, so erhalten wir:

$$2x^3 = 2\left(\frac{729}{8} + \frac{243}{8}\sqrt[2]{101} + \frac{2727}{8} + \frac{101}{8}\sqrt[2]{101}\right) = \frac{3456}{4} + \frac{344}{4}\sqrt[2]{101} = \frac{1728}{2} + \frac{172}{2}\sqrt[2]{101};$$

$$-23x^2 = -23\left(\frac{81}{4} + \frac{9}{2}\sqrt[2]{101} + \frac{101}{4}\right) = -23\left(\frac{91}{2} + \frac{9}{2}\sqrt[2]{101}\right) = -\frac{2093}{2} - \frac{207}{2}\sqrt[2]{101};$$

$$+35x = 35\left(\frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{101}\right) = \quad - \quad - \quad - \quad - \quad = \frac{315}{2} + \frac{35}{2}\sqrt[2]{101};$$

$$+25 = \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = \frac{50}{2};$$

$$2x^3 - 23x^2 + 35x + 25 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad = 0.$$

Auf dieselbe Weise würde man finden, daß die Gleichung auch mit dem zweiten Werthe der quadratischen Gleichung wahr werden, woraus denn hervorgeht, daß unsere kubische Gleichung, und da dieselbe Ableitung auch bei jeder andern ebenso gemacht werden kann, jede kubische Gleichung überhaupt drei mögliche Werthe hat.

2. $x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = 0.$

Zuerst wird das Glied mit x^2 hinweggeschafft: zu dem Ende setzen wir

$$x = y + \frac{6}{3} = y + 2.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} x^3 &= y^3 + 6y^2 + 12y + 8, \\ -6x^2 &= \quad -6y^2 - 24y - 24, \\ +7x &= \quad\quad + 7y + 14, \\ -10 &= \quad\quad\quad - 10, \end{aligned}$$

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = y^3 - 5y - 12 = 0,$$

woraus $y^3 = 5y + 12.$

Es ist also $A = 5$, $B = 12$,

mithin $\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3 = (6)^2 - \left(\frac{5}{3}\right)^3 = 36 - \frac{125}{27} = \frac{972-125}{27} = \frac{847}{27}$,

also v positiv.

Wir setzen daher:

I. $y = (u + \sqrt[2]{v}) + (u - \sqrt[2]{v})$,

II. $u^2 = \frac{5}{3} + v$,

III. $u^3 + 3uv = 6.$

1. Wählen wir nun $u^2 = 4$, so ist $v = 4 - \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$; da nun $\frac{7}{3}$ in $\frac{847}{27} = V$ wirklich enthalten, so prüfen wir diese Werthe $\left(u = \pm 2,\ v = \frac{7}{3}\right)$ nach Gleichung III. Dabei sehen wir vor Allem, daß u nicht negativ sein kann, weil sonst beide Glieder u^3 und 3uv negativ würden, aber die Summe zweier negativen Zahlen nicht gleich einer positiven Zahl (6) sein kann. Mithin bleibt uns bloß die Gleichung:

$$2^3 + 3 \cdot 2 \cdot \frac{7}{3} = 8 + 14 = 22, \text{ aber nicht} = 6.$$

Man sieht aus dieser Gleichung III. überhaupt, daß $u < 2$, aus II. aber, daß $u > 1$, mithin muß es ein unächter Bruch zwischen diesen beiden Gränzen sein.

2. Nehmen wir nun $u = \frac{3}{2}$, weil dieß der einfachste unächte Bruch zwischen den bezeichneten Gränzen,*) so wird

$$v = \frac{9}{4} - \frac{5}{3} = \frac{27 - 20}{12} = \frac{7}{12}.$$

Diese Werthe nach III. geprüft, erhalten wir:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{12} = \frac{27}{8} + \frac{21}{8} = \frac{48}{8} = 6,$$ was in der That richtig ist.

Es ist also $$y = \left(\frac{3}{2} + \sqrt[2]{\frac{7}{12}}\right) + \left(\frac{3}{2} - \sqrt[2]{\frac{7}{12}}\right) = 3;$$

mithin $$x = y + 2 = 3 + 2 = 5.$$

Diesen Werth von x in die gegebene Gleichung substituirt, wird dieselbe auch wirklich wahr, nemlich:

$$(5)^3 - 6 \cdot (5)^2 + 7 \cdot 5 - 10 = 125 - 150 + 35 - 10 =$$
$$= 160 - 160 = 0.$$

Es erübrigt noch, die beiden andern möglichen Werthe unserer kubischen Gleichung zu bestimmen. Dieß geschieht wie im ersten Beispiele auf folgende Art:

$x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = 0,$
$: x - 5 = m,$
woraus $x^2 - x + 2 = 0.$

$x^3 - 6x^2 + 7x - 10$
$: (x - 5) = x^2 - x + 2.$
$x^3 - 5x^2$
(−) (+)
$- x^2$
$- x^2 + 5x$
(+) (−)
$+ 2x$
$+ 2x - 10$
(−) (+)
0.

Es ist nun:

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4},$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt[2]{-7},$$

also entweder $$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{-7},$$

oder $$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt[2]{-7}.$$

*) Es ist eigentlich hiezu noch ein anderer, triftigerer Grund vorhanden: gemäß der Form unserer Gleichungen, welche keine Divisoren enthalten, kann die Unbekannte, so lange sie rational ist, nur eine ganze Zahl sein; da nun $y = 2u$ oder $u = \frac{y}{2}$, so kann u, wenn es auch wie in unserm Falle ein Bruch ist, doch keinen andern Nenner haben als 2.

Beide Werthe der quadratischen Gleichung machen auch unsere kubische Gleichung wahr; substituiren wir nemlich etwa den zweiten, so erhalten wir:

$$x^3 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8}\sqrt[2]{-7} - \frac{21}{8} + \frac{7}{8}\sqrt[2]{-7} = -\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[2]{-7};$$

$$-6x^2 = -6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sqrt[2]{-7} - \frac{7}{4}\right) = +\frac{18}{2} + \frac{6}{2}\sqrt[2]{-7};$$

$$+7x = +7\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt[2]{-7}\right) = +\frac{7}{2} - \frac{7}{2}\sqrt[2]{-7};$$

$$-10 = \qquad\qquad = -\frac{20}{2};$$

$$x^3 - 6x^2 + 7x - 10 = 0.$$

3. $4x^3 - 379x + 1155 = 0.$

Um den Coëffizienten von x^3 wegzuschaffen, setzen wir:

$$x = \frac{y}{2};$$

dann ist

$$4 \cdot \frac{y^3}{8} - 379 \cdot \frac{y}{2} + 1155 = 0,$$

$$y^3 - 379y + 2310 = 0,$$

$$y^3 = 379y - 2310.$$

Hier ist $A = 379$, $B = -2310$,

mithin $\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3 = (-1155)^2 - \left(\frac{379}{3}\right)^3 =$

$$= 1334025 - \frac{54439939}{27} = \frac{36018675 - 54439939}{27} = -\frac{18421264}{27},$$

also v negativ.

Wir setzen daher:

I. $y = (u + \sqrt[2]{-v}) + (u - \sqrt[2]{-v})$,

II. $u^2 = \frac{379}{3} - v$,

III. $u^3 - 3uv = -1155.$

Gemäß II. muß $u^2 < 144$ sein; nehmen wir den nächsten Werth $u^2 = 121$, so ist $u = \pm 11$, aber

$$v = \frac{379}{3} - 121 = +\frac{16}{3};$$

dieſe Werthe in III. ſubſtituirt, gibt:

a) (mit $u = +11$) $1331 - 3 \cdot 11 \cdot \frac{16}{3} = 1331 - 176 = 1155$ (unrichtig),

b) (mit $u = -11$) $-1331 + 3 \cdot 11 \cdot \frac{16}{3} = -1155$ (richtig).

Mithin iſt $y = \left(-11 + \sqrt[2]{-\frac{16}{3}}\right) + \left(-11 - \sqrt[2]{-\frac{16}{3}}\right) = -22$;

alſo $x = \frac{y}{2} = -\frac{22}{2} = -11$.

Probe. 4. $(-11)^3 - 379 \cdot -11 + 1155 = -5324 + 4169 + 1155$
$= -5324 + 5324 = 0$.

Suchen wir die beiden andern möglichen Werthe, ſo haben wir hiezu anzuſetzen:

$4x^3 - 379x + 1155 = 0$,
$x + 11 = m$,

woraus $4x^2 - 44x + 105 = 0$.

$4x^2 - 44x + (11)^2 = 121 - 105 = 16$,
$2x - 11 = \pm 4$,

daher entweder $x = \frac{15}{2}$,

oder $x = \frac{7}{2}$.

$4x^3 - 379x + 1155 : (x + 11) = 4x^2 - 44x + 105$
$4x^3 + 44x^2$
$(-)\ (-)$
$-44x^2$
$-44x^2 - 484x$
$(+)\ (+)$
$+105x$
$+105x + 1155x$
$(-)\ (-)$
0

Auch dieſe Werthe machen die kubiſche Gleichung wahr, denn es iſt

ſowohl $4 \cdot \frac{15^3}{8} - 379 \cdot \frac{15}{2} + 1155 = \frac{3375}{2} - \frac{5685}{2} + \frac{2310}{2} = 0$,

als auch $4 \cdot \frac{7^3}{8} - 379 \cdot \frac{7}{2} + 1155 = \frac{343}{2} - \frac{2653}{2} + \frac{2310}{2} = 0$.

Uebrigens laſſen ſich, wenn eine kubiſche Gleichung, wie die vorliegende, mehrere rationale Werthe hat, alle dieſe Werthe, nicht etwa bloß Einer, aus den drei angeſetzten Gleichungen beſtimmen. So erhalten wir in unſerm Falle:

1) wenn wir $u = \frac{7}{2}$, alſo $u^2 = \frac{49}{4}$ ſetzen,

nach II. $v = \frac{379}{3} - \frac{49}{4} = \frac{1516 - 147}{12} = \frac{1369}{12}$; da nun

nach III. $\frac{343}{8} - 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1369}{12} = \frac{343 - 9583}{8} = -\frac{9240}{8} = -1155$,

so ist wirklich $u = \frac{7}{2}$ und $v = \frac{1369}{12}$, woraus $y = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$, und $x = \frac{7}{2}$, wie aus der quadratischen Gleichung.

2) Setzen wir $u = \frac{15}{2}$ oder $u^2 = \frac{225}{4}$, so haben wir:

nach II. $v = \frac{379}{3} - \frac{225}{4} = \frac{1516 - 675}{12} = \frac{841}{12}$, aber wirklich ist

nach III. $\frac{3375}{8} - 3 \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{841}{12} = \frac{3375 - 12615}{8} = -\frac{9240}{8} = -1155$,

wonach denn in der That $u = \frac{15}{2}$ und $v = \frac{841}{12}$. Dann aber ist $y = \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = 15$, $x = \frac{15}{2}$, abermals wie aus der quadratischen Gleichung.

Obgleich aber, wie wir so eben gesehen haben, unsere drei angesetzten Gleichungen die drei möglichen Werthe der kubischen Gleichung enthalten, so thut man doch besser, sich auf die Entwicklung eines einzigen Werthes aus denselben zu beschränken, theils weil man ja doch nicht weiß, ob auch die beiden andern rational sind, theils aber, weil es jedenfalls kürzer und bequemer ist, dieselben aus der quadratischen Gleichung zu berechnen.

---

4. $x^3 - 201x + 416 = 0$,
oder $x^3 = 201x - 416$.

Hier ist $A = 201$, $B = -416$,

mithin $\left(\frac{B}{2}\right)^2 = (-208)^2 = 43264$,

$$\overset{(-)}{\left(\frac{A}{3}\right)^3} = (67)^3 = \overset{(-)}{300763},$$

$$\left(\frac{B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A}{3}\right)^3 = -257499, \text{ also } v \text{ negativ.}$$

Wir setzen daher:

I. $x = \left(u + \sqrt[2]{-v}\right) + \left(u - \sqrt[2]{-v}\right)$,

II. $u^2 = 67 - v$,

III. $u^3 - 3uv = -208$.

1) Der größte Werth, den wir hier für u setzen können, ist $u = \pm 8$, wornach $u^2 = 64$, und $v = 67 - 64 = 3$. Prüfen wir diese Werthe nach III., so haben wir:

a) wenn $u = +8 \ldots . 512 - 72 = +440$,

b) wenn $u = -8 \ldots . -512 + 72 = -440$, beides unrichtig.

2) $u = \pm 7$ oder $u^2 = 49$ ist von vorne herein unmöglich, weil dabei $v = 67 - 49 = 18$, aber 18 in V nicht enthalten; wir setzen daher

3) $u = \pm 6$ oder $u^2 = 36$, woraus $v = 67 - 36 = 31$, und daher nach III.:

a) wenn $u = +6 \ldots . 216 - 18 . 31 = 216 - 558 = -342$,

b) wenn $u = -6 \ldots . -216 + 18.31 = -216 + 558 = +342$.

Da nun unsere Zahl (-208) sowohl bei den positiven Annahmen für u zwischen $+440$ und -342, als auch bei den negativen zwischen -440 und $+342$ liegt, so folgt, daß ein Werth von u, er mag positiv oder negativ sein, zwischen 8 und 6 liege; da er aber, wie wir schon gesehen, nicht 7 ist, so kann er nur entweder $\frac{13}{2}$ oder $\frac{15}{2}$ sein. Versuchen wir's mit dem ersten, so ist, wenn $u = \frac{13}{2}$, $v = 67 - \frac{169}{4} = \frac{268}{4} - \frac{169}{4} = \frac{99}{4}$, und nach III.: $\left(\frac{13}{2}\right)^3 - 3 . \frac{13}{2} . \frac{99}{4} = \frac{2197}{8} - \frac{3861}{8} = -\frac{1664}{8} = -208$;

mithin $x = \left(\frac{13}{2} + \sqrt[2]{-\frac{99}{4}}\right) + \left(\frac{13}{2} - \sqrt[2]{-\frac{99}{4}}\right) = 13$.

In der That ist $(13)^3 - 201 . 13 + 416 = 2197 - 2613 + 416 = 0$.

Die beiden andern Werthe von x sind:

$$x = -\frac{13}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[2]{33},$$

$$x = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[2]{33}.$$

§. 103.

In den §§. 99. und 102. haben wir ein eigenthümliches Verhältniß kennen gelernt, welches zwischen dem Aggregate aus den Gliedern der auf 0 gebrachten quadratischen oder kubischen Gleichung, und zwischen den Aggregaten Statt findet, welche aus den

Gliedern der auf 0 gebrachten möglichen Werthgleichungen bestehen. Bezeichnen wir nemlich das erstere kurzweg als Aggregat der quadratischen oder kubischen Gleichung, die letztern als die Wurzel-Aggregate dieser Gleichungen (weil man nemlich die möglichen Werthe einer Gleichung auch ihre Wurzeln heißt), so läßt sich jenes Verhältniß einfach so ausdrücken:

„Das Aggregat sowohl der quadratischen als der kubischen Gleichung ist gleich dem Produkte aus den Wurzel-Aggregaten der betreffenden Gleichung."

Dieser Satz ist für die quadratischen Gleichungen der unmittelbare Ausdruck der Zerfällungs-Methode, für die kubischen aber geht er daraus hervor, daß das kubische Aggregat in jedem Beispiele des §. 102. zunächst das zuerst (durch die Kardans-Regel) gefundene Wurzel-Aggregat und nebstdem ein quadratisches Aggregat enthielt, welches das Produkt aus den beiden andern Wurzel-Aggregaten darstellte. In der That, wenn man in unsern vier Beispielen aus den gefundenen möglichen drei Werthen die entsprechenden Wurzel-Aggregate bildet und sie miteinander multiplizirt, so ist das dadurch erhaltene Aggregat jedesmal dasselbe wie das Aggregat der gegebenen Gleichung. So sind z. B. in 3) die drei möglichen Werthe:

$$x = -11, \quad x = \frac{7}{2}, \quad x = \frac{15}{2}.$$

Bringt man diese Gleichungen auf 0, so erhält man:

$$x + 11 = 0, \quad 2x - 7 = 0, \quad 2x - 15 = 0,$$

und multiplizirt man diese drei Wurzel-Aggregate miteinander, so findet sich wirklich:

$$(x + 11)(2x - 7)(2x - 15) = 4x^3 - 379x + 1155.$$

Hiemit haben wir das durch obigen Satz ausgedrückte Verhältniß zwischen dem Aggregate der quadratischen oder kubischen Gleichung und deren Wurzel-Aggregaten als thatsächlich bestehend nachgewiesen. Allein das reicht noch keineswegs hin: ist dieses Verhältniß, wie nicht anders zu erwarten, ein nothwendiges und allgemeines, so muß es in seiner Nothwendigkeit und Allgemeinheit auch bewiesen werden können. Dieß geschieht denn, und zwar nicht bloß für quadratische und kubische Gleichungen, sondern wirklich allgemein für alle Gleichungen, in folgender Weise:

Wenn man n Aggregate von der Form $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, ... mit einander multiplizirt, so entsteht das Aggregat:

$x^n - (a+b+c+d+....)x^{n-1} + (ab+ac+ad+bc+bd+cd+...)x^{n-2}$
$- (abc+abd+acd+bcd+....)x^{n-3} + (abcd+....)x^{n-4} .... \pm abcd...,$
welches offenbar dieselben aufeinander folgenden Potenzen von x, dieselbe Anzahl der Glieder, kurz dieselbe Form hat, wie das Aggregat einer auf 0 gebrachten Gleichung des nten Grades, nemlich wie

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - .... \pm M = 0,$$

so daß nur die Coëffizienten ihrer Glieder verschieden sind.

Setzen wir nun, weil wir n gänzlich unbestimmte Zahlen haben, nemlich a, b, c, d...., in eben so vielen Setzungen, d. i. in n Gleichungen erst die Coëffizienten der beiden zweiten Glieder dieser Aggregate, dann die der beiden dritten Glieder, u. s. w. einander gleich, also

$$a + b + c + d + ... = A,$$
$$ab + ac + ad + bc + ... = B, \text{ u. s. w.},$$

so sind beide Aggregate, deren erste Glieder ohnehin die nämlichen sind, Glied für Glied die nämlichen und sonach identisch. Es ist also unter diesen Voraussetzungen das eine Aggregat, was das andere, mithin weil das eine das Produkt aus den n Faktoren $x - a$, $x - b$, $x - c$, $x - d$, ..., so auch das andere, also $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - ... \pm M = (x-a)(x-b)(x-c)... = 0$.

Da aber wie das Aggregat, so auch das Produkt $= 0$, ein Produkt aber nur dann $= 0$ sein kann, wenn einer seiner Faktoren es ist, so folgt, daß entweder $x - a = 0$ und dann $x = a$, oder $x - b = 0$ und dann $x = b$, u. s. w. Mithin sind die n Faktoren $x - a$, $x - b$ u. s. w. offenbar die Wurzel-Aggregate der gegebenen Gleichung des nten Grades, und es ist laut der voranstehenden Gleichung

„das Aggregat der auf 0 gebrachten Gleichung des nten Grades gleich dem Produkte aus ihren n Wurzel-Aggregaten."

Als erste und unmittelbare Folgerung dieses allgemeinen Satzes ergibt sich, daß jede Gleichung des nten Grades n Wurzel-Aggregate enthält (indem ja bei keiner andern Anzahl derselben sich solche zwei identische Aggregate bilden ließen) und somit n mögliche Werthe gibt, wonach denn eine quadratische Gleichung zwei, eine kubische drei mögliche Werthe hat, wie wir das auch bisher schon so gefunden.

Außer dieser ersten Folgerung lassen sich aus unserm obigen

Satze auch noch andere für die Auflösung der Gleichungen höchst wichtige Folgerungen entwickeln, nemlich

1) hinsichtlich der Zeichen der möglichen Werthe,
2) hinsichtlich der Art und der Darstellung derselben.

ad 1) Wenn wir untersuchen wollen, wie von den Zeichen der Glieder einer Gleichung auf die Zeichen ihrer möglichen Werthe oder Wurzeln geschlossen werden könne, so müssen wir umgekehrt, erst bestimmte Zeichen der Wurzeln voraussetzend, zusehen, mit welchen Zeichen sich in den verschiedenen hiebei möglichen Fällen die Glieder der Gleichung darstellen.

Dieser Fälle sind aber drei, nemlich:

a) alle Wurzeln sind positiv,
b) alle negativ,
c) einige positiv, andere negativ.

ad a) Nehmen wir der Kürze halber eine kubische Gleichung zum Parabigma für unsere Entwicklung, so findet der Fall a) statt, wenn $x = a$, oder $x = b$, oder $x = c$. Dem entsprechend sind $x - a$, $x - b$, $x - c$ die Wurzel-Aggregate unserer kubischen Gleichung, und wir erhalten das Aggregat dieser Gleichung selbst, indem wir jene mit einander multipliziren.

Es ist aber

$$\begin{array}{r} x - a \\ x - b \\ \hline x^2 - ax \\ - bx + ab \\ \hline x^2 - (a+b)x + ab \\ x - c \\ \hline x^3 - (a+b)x^2 + abx \\ - \quad cx^2 + (ac+bc)x - abc \\ \hline x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc. \end{array}$$

Das, was wir hier hinsichtlich der Zeichen beobachten, ist offenbar ein durchgehendes Wechseln der Zeichen, indem jedes folgende Glied ein anderes Zeichen hat als das ihm vorhergehende. Da nun der folgenden Glieder, also auch der Wechsel der Zeichen immer so viele sind, als die Gleichung Wurzeln hat, so kann man obige Beobachtung auch aussprechen in dem Satze:

„Wenn alle Wurzeln einer Gleichung positiv

sind, so kommen in ihrem Aggregate so viele Wechsel der Zeichen vor, als sie Wurzeln hat."

ad b) Ist $x = -a$, oder $x = -b$, oder $x = -c$, d. h. alle Wurzeln unserer kubischen Gleichung negativ, so sind die drei Wurzel-Aggregate: $x + a$, $x + b$ und $x + c$. Diese mit einander multiplizirt geben:

$$\begin{array}{r} x + a \\ x + b \\ \hline x^2 + ax \\ \quad + bx + ab \\ \hline x^2 + (a+b)x + ab \\ x + c \\ \hline x^3 + (a+b)x^2 + abx \\ + \quad cx^2 + (ac+bc)x + abc \\ \hline x^3 + (a+b+c)x + (ab+ac+bc)x + abc. \end{array}$$

Augenscheinlich findet hier kein Wechsel der Zeichen statt, sondern mit jedem folgenden Gliede wiederholt sich dasselbe Zeichen. Da nun der folgenden Glieder in jeder Gleichung so viele sind, als sie Wurzeln hat, so kann man die hier an den Zeichen gemachte Beobachtung auch so aussprechen:

„Wenn eine Gleichung lauter negative Wurzeln hat, so kommen in ihrem Aggregate so viele Wiederholungen der Zeichen vor, als sie Wurzeln hat."

ad c) Es habe unsere Gleichung etwa zwei positive und Eine negative Wurzel, und es sei also entweder $x = a$, oder $x = b$, oder $x = -c$, so sind die entsprechenden drei Wurzel-Aggregate: $x - a$, $x - b$, $x + c$. Diese miteinander multiplizirt geben:

$$\begin{array}{r} x - a \\ x - b \\ \hline x^2 - (a+b)\,x + ab \\ x + c \\ \hline x^3 - (a+b)\,x^2 + abx \\ + \quad cx^2 - (ac+bc)x + abc. \end{array}$$

Wenn wir nun hier summiren wollen, so kommt es darauf

an, für die an sich gänzlich unbestimmten Größen-Verhältnisse der Coëffizienten bestimmte zu setzen. Es sei also

$$\alpha) \quad a + b > c,$$

so ist nach dieser Voraussetzung auch das Größen-Verhältniß von ab und $(ac + bc)$ zu bestimmen; es kann aber, wie aus der folgenden Beweisführung hervorgeht,

1) $ac + bc < ab$ sein,
2) $ac + bc = ab$,
3) $ac + bc > ab$,

ohne daß die eine oder die andere Annahme mit unserer Voraussetzung unverträglich wäre.

Ist nemlich

1) $(a + b)c < ab$,

während $\frac{a+b}{c} > 1$ [nach α],

so kann *) $(a + b)^2 > ab$ sein, was es auch sein muß;

2) ist $(a + b)c = ab$,

während $\frac{a+b}{c} > 1$,

so ist ohnehin $(a + b)^2 > ab$;

3) ist endlich $(a + b)c > ab$,

während $\frac{a+b}{c} > 1$,

so ist um so mehr $(a + b)^2 > ab$.

Wir erhalten also unter der Voraussetzung α) durch Summation obiger Produkte folgendes Aggregat der kubischen Gleichung:

$$x^3 - (a + b - c)x^2 \pm [ab - (ac + bc)]x + abc = 0.$$

*) Wenn nemlich $(a + b)c < ab$, so sei $(a + b)c = ab \cdot \frac{n}{m}$ (wo $m > n$),

und wenn $\frac{(a+b)}{c} > 1$, so sei $\frac{a+b}{c} = 1 \cdot m$ (wo $m > 1$);

es ist sodann $(a + b)^2 = ab \cdot n > ab$, wie oben.

Setzen wir aber

$$\beta)\quad a + b < c,$$

so muß $ac + bc > ab$ sein; denn wäre

1) $(a + b)\,c = ab$

während $\frac{a+b}{c} < 1$,

so wäre $(a+b)^2 < ab$, was unmöglich ist;

wäre aber 2) $(a + b)\,c < ab$,

während $\frac{a+b}{c} < 1$,

so wäre abermals $(a+b)^2 < ab$, also wieder unmöglich.

Mithin gibt die Voraussetzung β) folgende Summe:

$$x^3 + [c - (a + b)]\,x^2 - [(ac + bc) - ab]\,x + abc = 0.$$

Bezeichnen wir die Coëffizienten der unter α) und β) erhaltenen kubischen Gleichung einfach mit A, B, C, und A′, B′, C′, so haben wir:

$\alpha)\quad x^3 - Ax^2 \pm Bx + C = 0;$

$\beta)\quad x^3 + A'x^2 - B'x + C = 0.$

In beiden Gleichungen finden wir, und zwar bei α) sowohl wenn wir $+Bx$ als wenn wir $-Bx$ annehmen, zwei Wechsel und Eine Wiederholung der Zeichen, also so viele Wechsel als positive, und so viele Wiederholungen als negative Wurzeln der Gleichung vorhanden sind.

Da aber dasselbe Verhältniß auch bei a) und b) besteht, wo wir bei n positiven Werthen auch n Wechsel, bei n negativen n Wiederholungen der Zeichen haben, so geht aus allen drei Fällen ein und derselbe Satz hervor, nemlich:

„In jeder Gleichung (wenn sie auf 0 gebracht) kommen so viele Wechsel der Zeichen vor, als sie positive, und so viele Wiederholungen der Zeichen, als sie negative Wurzeln hat.“

Offenbar*) kann man diesen Satz auch vollständig umkehren und sagen:

*) Nehmen wir z. B. an, eine Gleichung, welche drei Wechsel der Zeichen darbietet, habe nicht drei positive Werthe, sondern etwa nur zwei positive

„Eine Gleichung hat so viele positive Wurzeln, als Wechsel der Zeichen in ihr vorkommen, und so viele negative, als Wiederholungen."

---

ad 2) Dem Hauptsatze dieses §. zufolge ist das Aggregat einer jeden (auf 0 gebrachten) Gleichung = dem Produkte aus allen ihren Wurzel-Aggregaten. d. h.

$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots \pm M = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots$

Wenn man nun diese Wurzel-Aggregate mit einander multiplizirt, so ist das hiedurch entstehende Aggregat identisch mit dem Aggregate der Gleichung, d. h. Glied für Glied dasselbe, indem, wie wir oben gesehen, nur unter dieser Voraussetzung a, b, c.... wirklich die Wurzeln der Gleichung sind. Es ist also

1) $A = a + b + c + \ldots$,
2) $B = ab + ac + bc + \ldots$,
3) $C = abc + \ldots$, u. s. w.

endlich 4) $M = abc \ldots$, d. h.

1) der Coëffizient des zweiten Gliedes der Gleichung ist gleich der Summe aller ihrer Wurzeln,
2) der Coëffizient des dritten Gliedes gleich der Summe aller möglichen Produkte aus je zweien von den Wurzeln,
3) der des dritten Gliedes gleich der Summe aller möglichen Produkte aus je dreien von den Wurzeln, u. s. w.; endlich
4) ist das letzte Glied der Gleichung gleich dem Produkte aus sämmtlichen Wurzeln.

Die hiedurch gegebenen n Gleichungen könnten nun wohl dazu dienen, unsere n Unbekannten, d. h. die n Wurzeln der Gleichung daraus zu bestimmen; allein die wirkliche Ausführung dieser Rechnung bietet mit den Graden der Gleichung steigende Schwierigkeiten, welche zu überwinden wir bis jetzt kein Mittel kennen.*)

---

und Einen negativen Werth, so müßte dem vorausgehenden direkten Satze zufolge die Gleichung nur zwei Wechsel und Eine Wiederholung der Zeichen haben; das hat sie aber nicht, mithin ist unsere Annahme unmöglich. Und so in jedem andern Falle.

*) Da übrigens diese Schwierigkeiten bloß rechnerischer Natur sind, und wir von ihrer Ueberwindung keine weitern mathematischen Aufschlüsse zu erwarten haben, so lohnt's sich wohl nicht der Mühe, auf dieselben tiefer einzugehen.

Man begnügt sich daher damit, aus diesen Gleichungen einige sich unmittelbar darbietende Schlüsse auf die Art der möglichen Wurzeln zu ziehen, und übrigens die Wurzeln selbst, wie in den unten folgenden Beispielen, auf die Gleichungen 1) und 4) gestützt, versuchsweise zu bestimmen.

Diese Schlüsse aber sind:

1) Imaginäre Wurzeln sind nur paarweise möglich, und zwar in der Form: $(p + q\sqrt[2]{-1})$ und $(p - q\sqrt[2]{-1})$,

   α) weil nur unter dieser Voraussetzung die Summe der Wurzeln nach Gleichung 1) eine reelle Zahl A gibt, indem $(p + q\sqrt[2]{-1}) + (p - q\sqrt[2]{-1}) = 2p$;

   β) weil, wenn 1, 3, 5 imaginäre Wurzeln vorhanden wären, das letzte Glied oder das Produkt aus sämmtlichen Wurzeln imaginär sein müßte, während solche paarweise vorhandene Wurzeln immerhin ein reelles Produkt geben,

   z. B. $(p + q\sqrt[2]{-1}) \times (p - q\sqrt[2]{-1}) = p^2 + q^2$.

2) Daraus folgt weiter von selbst, daß eine Gleichung des 2ten Grades nur 2 reelle oder 2 imaginäre Wurzeln, eine Gleichung des 3ten Grades 1 oder 3 reelle oder 2 oder keine imaginäre Wurzeln, eine Gleichung des 4ten Grades keine oder 2 oder 4 reelle oder 4 oder 2 oder keine imaginäre Wurzeln habe u. s. w., wobei sich dann für Gleichungen eines ungeraden Grades noch insbesondere die Wahrnehmung machen läßt, daß solche jedenfalls wenigstens Eine reelle Wurzel haben müssen.

Gehen wir endlich daran, diese Sätze zur wirklichen Auflösung einer höhern Gleichung anzuwenden, und sei diese:

$$x^4 + x^3 - 64x^2 + 236x - 240 = 0,$$

so wissen wir vorerst, daß dieselbe drei positive und Eine negative Wurzel habe, weil darin drei Wechsel und Eine Wiederholung der Zeichen vorkommen.

Es seien nun die drei positiven Wurzeln a, b, c, die negative d, so sind die Wurzel-Aggregate folgende:

$$x - a,\ x - b,\ x - c,\ x + d.$$

Multipliziren wir die drei ersten miteinander, so erhalten wir:

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc;$$

hieraufmit $x + d$,

so: $x^4 - (a+b+c)x^3 + (ab+ac+bc)x^2 - abcx$
$+ \quad dx^3 - (ad+bd+cd)x^2 + (abd+acd+bcd)x$
$- abcd$

$$x^4 + [d-(a+b+c)]x^3 - [(ad+bd+cd)-(ab+ac+bc)]x^2 + [abd+acd+bcd-abc]x - abcd,$$

wobei wir so summiren müssen, daß das erhaltene Aggregat mit dem gegebenen Aggregate der Gleichung in den Zeichen übereinstimmt.

Es ist nun

1) $d-(a+b+c)=1$,
2) $(ad+bd+cd)-(ab+ac+bc)=64$,
3) $abd+acd+bcd-abc=236$,
4) $abcd=240$.

Da jedoch diese Gleichungen immer wieder auf eine des 4ten Grades führen, wenn man sie wie immer in Eine Gleichung mit Einer Unbekannten vereinigt, so bleibt nichts anders übrig, als mit Hilfe der beiden einfachsten von ihnen, nemlich von 1) und 4), diese Unbekannten versuchsweise zu bestimmen.

Demnach hat man [gemäß 4)] 240 in solche vier Faktoren zu zerlegen, daß einer davon (d) um 1 größer sei als die Summe der drei übrigen [gemäß 1)]. In der That läßt sich 240 in vier solche Faktoren zerlegen; es ist nemlich $240=2.3.4.10$, und $10-(2+3+4)=1$. Versuchen wir nun, ob die Gleichung mit dem einen oder andern dieser Faktoren wahr werde, so findet sich in der That, daß dieß mit jedem derselben der Fall ist, und daß sohin diese vier Faktoren die vier Wurzeln unserer Gleichung sind; es ist nemlich:

1) wenn $x=2$, $16+8-256+472-240=496-496=0$;
2) wenn $x=3$, $81+27-576+708-240=816-816=0$;
3) wenn $x=4$, $256+64-1024+944-240=1264-1264=0$;
4) wenn $x=-10$, $10000-1000-6400-2360-240=$
$=10000-10000=0$.

Gewöhnlich jedoch macht sich die Sache nicht so leicht, namentlich bietet die Gleichung 1), wenn nicht $A=0$ oder $A=a+b+c+\ldots$, meistens nur geringe Anhaltspunkte für

die Bestimmung der Unbekannten, während die folgenden Gleichungen mit Ausnahme der letzten zu diesem Zwecke ganz unbrauchbar sind. Man entwickelt daher auch diese Gleichungen in der Regel gar nicht, sondern beschränkt sich darauf, das letzte Glied in seine Faktoren zu zerlegen, und von diesen so lange statt x in die Gleichung zu substituiren, bis man einen Faktor gefunden, der die Gleichung wahr macht. Die so gefundene Wurzel benützt man sodann, um auf eine um einen Grad tiefere Gleichung zu kommen, indem man das Aggregat der gegebenen Gleichung wie in §. 102. durch das gefundene Wurzel-Aggregat dividirt. Die dadurch erhaltene Gleichung behandelt man nun ebenso, und das so fort (vorausgesetzt, daß immer reelle und rationale Wurzeln vorhanden), bis man auf eine quadratische Gleichung kommt, welche man natürlich nicht mehr versuchsweise, sondern nach irgend einer der hiefür aufgestellten Methoden auflöst. Z. B.

$$4x^4 + 3x^3 - 33x^2 - 40x + 12 = 0.$$

Vorerst bemerken wir, daß von den vier Wurzeln dieser Gleichung zwei positiv und zwei negativ sind, weil in derselben zwei Wechsel und zwei Wiederholungen der Zeichen vorkommen. Weil ferner das erste Glied noch mit einem Coëffizienten behaftet ist, so können wir unsere Methode noch nicht darauf anwenden, sondern müssen zuerst diesen Coëffizienten wegschaffen. Wir setzen also nach §. 101. 1)

$x = \frac{y}{4}$, so erhalten wir:

$$4 \cdot \frac{y^4}{4^4} + 3 \cdot \frac{y^3}{4^3} - 33 \cdot \frac{y^2}{4^2} - 40 \cdot \frac{y}{4} + 12 = 0,$$

$$y^4 + 3y^3 - 132y^2 - 640y + 768 = 0.$$

Die Faktoren von 768 sind:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 128, 192, 256, 384, 768.

Unter diesen Faktoren kann man nun freilich möglicher Weise lange wählen, (wobei man jeden Faktor sowohl positiv als negativ anzuwenden hat) bis man etwa findet, daß $y = -8$, indem

$$(-8)^4 + 3 \cdot (-8)^3 - 132 \cdot (-8)^2 - 640 \cdot (-8) + 768 =$$
$$= 4096 - 1536 - 8448 + 5120 + 768$$
$$= 9984 - 9984 = 0.$$

Dividirt man nun

$y^4 + 3y^3 - 132y^2 - 640y + 768 = 0$

durch $: (y + 8)$, $= m$, so erhält man die kubische Gleichung:

$y^3 - 5y^2 - 92y + 96 = 0.$

$$\begin{array}{r} y^4 + 8y^3 \\ \underset{(-)}{} \quad \underset{(-)}{} \\ \hline -5y^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -5y^3 - 40y^2 \\ \underset{(+)}{} \quad \underset{(+)}{} \\ \hline -92y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -92y^2 - 736y \\ \underset{(+)}{} \quad \underset{(+)}{} \\ \hline +96y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +96y + 768 \\ \underset{(-)}{} \quad \underset{(-)}{} \\ \hline 0 \end{array}$$

Nun sind die Faktoren von 96 folgende:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96;

die Wahl ist also wieder groß genug, jedoch mag man leicht bemerken, daß die Gleichung wahr ist, wenn $y = 1$, indem dann $1 - 5 - 92 + 96 = 97 - 97 = 0$.

Dividirt man nun wieder die kubische Gleichung durch die hiemit gefundene Wurzelgleichung, so erhält man eine quadratische, nemlich:

$$\begin{array}{l|l} y^3 - 5y^2 - 92y + 96 = 0 & y^2 - 4y - 96 = 0. \\ y - 1 = n & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 \\ \underset{(-)}{} \quad \underset{(+)}{} \\ \hline -4y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4y^2 + 4y \\ \underset{(+)}{} \quad \underset{(-)}{} \\ \hline -96y \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -96y + 96 \\ \underset{(+)}{} \quad \underset{(-)}{} \\ \hline 0 \end{array}$$

Da endlich $y^2 - 4y - 96 = (y + 8)(y - 12) = 0$, so sind die beiden weitern Werthe $y = -8$, und $y = 12$, so daß der Werth -8 zweimal vorkömmt. Die entsprechenden Werthe unserer ursprünglichen Unbekannten x sind nun:

1) wenn $y = -8$, $x = \frac{y}{4} = -2$;

2) „ $y = 1$, $x = \frac{y}{4} = \frac{1}{4}$;

3) „ $y = -8$, $x = \frac{y}{4} = -2$;

4) „ $y = 12$, $x = \frac{y}{4} = 3$,

welche Werthe denn auch wirklich alle die gegebene Gleichung wahr machen.

§. 104.

Die im vorigen §. erörterte allgemeine Art der Auflösung numerischer Gleichungen eines beliebigen Grades läßt sich nur dann anwenden, wenn die Wurzeln wenigstens bis auf zwei, welche zwei sich aus der übrig bleibenden quadratischen Gleichung in jedem Falle berechnen lassen, ganze Zahlen sind. Noch eine allgemeine Methode gibt es, auch irrationale Wurzeln zu bestimmen, wenn sie nur reell sind: es ist dieß die Methode der genäherten Werthe. Diese beruht auf folgender Betrachtung: bezeichnen wir das Aggregat der auf 0 gebrachten Gleichung mit X, so ist immer, so oft wir für x einen seiner wirklichen Werthe setzen, $X = 0$; wenn wir aber für x andere Zahlen setzen, so werden die dabei erhaltenen Aggregate X_1, X_2 nicht mehr $= 0$, aber doch um so näher an 0 sein, je näher die für x gesetzte Zahl einem der wirklichen Werthe von x steht. So lange die Aggregate X_1 und X_2 beide positiv oder beide negativ sind, hat man offenbar noch keine solchen zwei Werthe für x gewählt, zwischen welchen der wahre Werth liegt, sondern es sind beide gewählte Zahlen zu groß oder beide zu klein. Wenn aber etwa X_1 positiv und X_2 negativ ist, so kann man daraus schließen, daß die eine der gewählten Zahlen zu groß, die andere zu klein sei, also der wahre Werth zwischen beiden liege. Man wählt nun einen dritten mittlern Werth in der Art, daß er demjenigen der beiden zuerst gewählten Werthe näher liege, für welchen X weniger von 0 differirt. Dieß setzt man denn so lange fort, bis man einen Werth gefunden hat, der auf eine beliebige Anzahl von Dezimal-

stellen mit dem wahren Werthe von x übereinstimmt, wie dieß aus dem folgenden Beispiele zu ersehen ist.

Man habe die Gleichung (aus §. 102):

$$2x^3 - 23x^2 + 35x + 25 = 0.$$

Die Gleichung hat zwei positive Werthe; suchen wir nun einen davon, indem wir etwa wählen

$$1)\ x = 10,$$

so ist $X_1 = 2000 - 2300 + 350 + 25$

$= 2375 - 2300 = +75$ (zu groß).

Wir wählen also,

$$2)\ x = 9,$$

so ist $X_2 = 2 \,.\, 729 - 23 \,.\, 81 + 35 \,.\, 9 + 25$

$= 1458 - 1863 + 315 + 25$

$= 1798 - 1863 = -65$ (zu klein).

Der wahre Werth von x liegt also offenbar zwischen 10 und 9 und zwar ziemlich mitten inne; es sei also

$$3)\ x = 9,5,$$

so ist $X_3 = 2 \,.\, (9,5)^3 - 23 \,.\, (9,5)^2 + 35 \,.\, 9,5 + 25$

$= 1714,75 - 2075,75 + 332,5 + 25$

$= 2072,25 - 2075,75 = -3,5$ (zu klein).

$$4)\ x = 9,525,$$

so ist $X_4 = 2 \,.\, (9,525)^3 - 23 \times (9,525)^2 + 35 \,.\, 9,525 + 25$

$= 1728,3230 - 2086,6894 + 333,375 + 25$

$= 2086,6980 - 2086,6894 = +0,0086$ (ziemlich nahe, aber doch zu groß).

$$5)\ x = 9,52495,$$

so $X_5 = 1728,2944 - 2086,6658 + 333,3732 + 25$

$= 2086,6676 - 2086,6658 = +0,0018$ (noch etwas zu groß).

$$6)\ x = 9,52493,$$

so $X_6 = 1728,28502 - 2086,65869 + 333,37255 + 25$

$= 2086,65757 - 2086,65869 = -0,0011$(2 (etwas zu klein);

daher $7)\ x = 9,524938,$

wobei $X_7 = 1728,28938 - 2086,66219 + 333,37283 + 25$

$= 2086,66221 - 2086,66219 = 0,0000$(2, so genau, daß der Werth noch auf die sechste Dezimalstelle sicherlich richtig ist.

In der That hatten wir als einen der positiven Werthe dieser Gleichung gefunden:

$$x = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{101}$$

$$= 4{,}5 + \frac{10{,}049876}{2}$$

$$= 4{,}5 + 5{,}024938$$

$$= 9{,}524938 \text{ wie oben.}$$

$\sqrt{101} = 10{,}049876$

100

10000

:(2004)

8016

198400

:(20089)

180801

17599

:(2009(8)

16078

1521

200(99

1407

114

:(20)

Aus dieser Probe ersieht man zur Genüge, welche Schwierigkeiten die Auflösung der Gleichungen auf diesem Wege biete, aber doch auch, daß diese Methode allgemein für alle Gleichungen anwendbar sei, wenn sie nur einen reellen Werth haben. Dieß erstreckt sich sogar auf die Exponential- und logarithmischen Gleichungen — jedoch weiter darauf einzugehen, wäre ganz nutzlos, weil mit dem oben Gesagten die Sache theoretisch erschöpft, die kluge Wahl von Werthen aber bloß Sache der Praxis ist.

§. 105.

Um für die Auflösungsarten der §§. 103. und 104., bei welchen die Auflösung der Gleichung bloß versuchsweise geschieht, wenigstens bei kubischen Gleichungen, welche natürlich von den höheren Gleichungen noch am häufigsten vorkommen, einige Anhaltspunkte zur Bestimmung der Wurzeln zu haben, wollen wir für dieselben die sogenannten Wurzelschranken suchen.

Man kann im Allgemeinen jeder höhern Gleichung die Form geben: $f_1(x) \pm f_2(x) = M$, oder $f_1(x) \times f_2(x) = M$, wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ irgend welche von x abhängige Ausdrücke, M aber das bekannte letzte Glied der Gleichung ist. Wenn man nun etwa die eine dieser Funktionen von x oder auch M vernachlässigt, so kann man leicht zwischen den beibehaltenen Größen eine Gleichung (ei-

gentlich Nicht-Gleichung) aufstellen; ist sodann diese Gleichung auflösbar, so erhält man zwar keineswegs den Werth der Unbekannten selbst, aber ein gewisses Verhältniß derselben zu einem bekannten Ausdrucke A. Es sei dieses etwa $x > A$, so weiß man, daß x nicht unter A herabgehen kann, und somit bildet diese Gleichung nach Einer Seite wenigstens eine Schranke für die möglichen Werthe von x, und heißt daher mit Recht eine Wurzelschranke für die gegebene Gleichung.

Vermag man nun auf ähnliche Art noch eine zweite Gleichung aufzustellen, gemäß welcher etwa $x < B$, so kann nach dieser x nicht über B hinausgehen, und somit bietet dieselbe eine zweite Wurzelschranke für die gegebene Gleichung. Man habe z. B. die biquadratische Gleichung:

$$2x^4 - 3x^3 - 10x^2 - 49 = 0,$$

so kann man diese umformen in:

$$(2x^4 - 10x^2) - 3x^3 = 49,$$

wo $2x^4 - 10x^2$ unser obiges $f_1(x)$, $3x^3$ aber $f_2(x)$, endlich 49 unser M vorstellt. Es ist offenbar

1) $2x^4 - 10x^2 > 49$, wobei $f_2(x)$ vernachlässigt wird.

Setzt man hier $x^2 = y$, und $x^4 = y^2$, so erhält man:

$$2y^2 - 10y > 49,$$
$$4y^2 - 20y + 25 > 98 + 25 > 123,$$
$$2y - 5 > 11, \ldots,$$
$$2y > 16, \ldots,$$
$$y > 8, \ldots,$$

daher $x = \sqrt[2]{y} > \sqrt[2]{8}, \ldots > 2, 8 \ldots$.

Dieselbe Gleichung kann man aber auch umformen in:

$$x^2 (2x^2 - 3x - 10) = 49.$$

Vernachlässigt man hier etwa $x^2 = f_1(x)$, so erhält man die Gleichung:

2) $2x^2 - 3x - 10 < 49$, (vorausgesetzt, daß $x > 1$)

woraus $2x^2 - 3x < 59$,

$$4x^2 - 6x + \frac{9}{4} < 118 + \frac{9}{4} < \frac{481}{4},$$

$$2x - \frac{3}{2} < \frac{21{,}93 \ldots}{2},$$

$$2x < \frac{24{,}93}{2},$$

woraus $x < 6{,}23 \ldots$.

In der That ist der einzige positive Werth dieser Gleichung, nemlich $x = \frac{7}{2} = 3{,}5$ zwischen den hier angegebenen Schranken, nemlich $3{,}5 > 2{,}8\ldots$ aber $< 6{,}23\ldots$

Dieselbe Gleichung hätte man auch so behandeln können:

Man vernachlässige $M = 49$, so erhält man:

$$1)\quad 2x^4 - 3x^3 - 10x^2 > 0,$$

daher $2x^2 - 3x - 10 > 0,$

$$4x^2 - 6x > 20,$$

$$4x^2 - 6x + \frac{9}{4} > \frac{89}{4},$$

$$2x - \frac{3}{2} > \frac{9{,}4\ldots}{2},$$

$$2x > \frac{12{,}4\ldots}{2},$$

$$x > 3{,}1\ldots$$

Bei obiger zweiten Form der Gleichung, nemlich bei

$$x^2(2x^2 - 3x - 10) = 49$$

kann man auch $f_2(x) = (2x^2 - 3x - 10)$ vernachlässigen; dann erhält man:

$$2)\quad x^2 < 49,$$

$$x < 7,$$

so daß 3, 1 .... und 7 wieder ein Paar Schranken der gegebenen Gleichung sind, wobei abermals $x = 3{,}5$ in der That zwischen denselben liegt.

Diese Beispiele mögen hinreichen, um zum Belege dessen zu dienen, was wir oben im Allgemeinen über die Bestimmung der Wurzelschranken für die Gleichungen gesagt haben. Nur das mag noch in's Allgemeine bemerkt werden, daß die Wurzelschranken den wirklichen Wurzeln um so näher fallen müssen, je kleiner im Verhältnisse zu den beibehaltenen Größen die vernachläßigte ist, namentlich wenn diese bloß einen Summanden vorstellt, während sie als Faktor leicht von größerem Einfluße ist. Mit dieser Bemerkung wenden wir uns zu unserer speziellen Aufgabe, d. i. zur Bestimmung der Wurzelschranken bei den kubischen Gleichungen, wo dieselbe sogleich Anwendung findet.

Die Benützung der Wurzelschranken setzt voraus, daß die Berechnung derselben nicht selbst schon langwierig sei, sondern wo

möglich nach ganz einfachen Ausdrücken stattfinde. Um aber solche zu erhalten, müßten jedenfalls zwei Glieder der kubischen Gleichung zugleich vernachlässigt werden, z. B. das mit x^2 und das mit x, wodurch wir etwa $x^3 > C$, und $x > \sqrt[3]{C}$ erhielten. Eine solche Wurzelschranke möchte sich aber meistens als zu weit und daher wenig brauchbar erweisen, weil nemlich zu viele und zu bedeutende Glieder vernachlässigt worden sind. Ein ganz Anderes aber ist es, wenn die kubische Gleichung die Form hat, welche schon die Anwendung der Kardans-Regel erfordert, nemlich daß ihr das zweite Glied mit dem Quadrate der Unbekannten fehlt, indem dann nur ein einziges Glied vernachlässigt zu werden braucht, um auf einen ganz einfachen Ausdruck der Wurzelschranke zu kommen. Kubische Gleichungen von dieser Form sind vier verschiedene möglich, nemlich:

1) $x^3 + Ax + B = 0$,
2) $x^3 - Ax + B = 0$,
3) $x^3 - Ax - B = 0$,
4) $x^3 + Ax - B = 0$.

Wir suchen die Wurzelschranken bloß für die Zahlen der Wurzeln ohne Rücksicht auf ihre Zeichen, so daß zunächst bloß die positiven Wurzeln berücksichtigt werden. Will man die Wurzelschranken für die Zahlen negativer Wurzeln herstellen, so braucht man bloß in der gegebenen Gleichung $-x$ für x zu setzen, worauf die neue Gleichung dieselbe aber nun positive Zahl zur Wurzel hat wie die gegebene, daher ihre Wurzelschranken offenbar die Zahl der gesuchten negativen Wurzel einschließen. Das findet denn sogleich bei unserer ersten Gleichung Anwendung, welche nur negative Wurzeln haben kann; setzen wir in derselben $-x$ statt x, so erhalten wir:

$$(-x)^3 + A.(-x) + B = 0,$$
$$-x^3 - Ax + B = 0,$$
$$x^3 + Ax - B = 0,$$

also dieselbe Gleichung wie 4). Mithin ist für die Bestimmung der Wurzelschranken obige erste Form der kubischen Gleichung ganz unzulässig, und es bleiben uns nur die drei zu beachten:

1) $x^3 - Ax + B = 0$,
2) $x^3 - Ax - B = 0$,
3) $x^3 + Ax - B = 0$,

welche letztere durchaus jeden negativen Werth ausschließt, während

die beiden ersteren für negative Werthe gegenseitig in einander übergehen, so daß für die Wurzelschranken der positiven wie der negativen Wurzeln bloß diese drei Formen in Betracht kommen.

Haben wir nun

$$1)\quad x^3 - Ax + B = 0,$$

so ist a) $x^3 + B = Ax$, b) $Ax = x^3 + B$, oder b') $Ax - x^3 = B$,

daher $x^3 < Ax$, $Ax > B$, $(A - x^2)x = B$,

$x^2 < A$, $x > \frac{B}{A}$; $A - x^2$ *) $< B$,

$x < \sqrt[2]{A}$; $A - B < x^2$,

$x > \sqrt[2]{A - B}$.

Anmerkung. Die Wurzelschranke b) ist anzuwenden, wenn $B > A$, hingegen b') wenn $A > B$, damit man in beiden Fällen die möglichst größte, also der wahren Wurzel nächste Wurzelschranke erhalte.

Z. B. Es sollen die Wurzelschranken der Gleichung

$$x^3 - 912x + 6136 = 0$$

bestimmt werden, und zwar α) die der beiden positiven Wurzeln, β) die der negativen Wurzel.

α) $x < \sqrt[2]{912}$, $x > \frac{6136}{912}$,

$< 30{,}2$ (ungefähr); $> 6{,}7\ldots$

In der That sind die beiden positiven Werthe dieser Gleichung, nemlich 26 und 7,12... zwischen diesen Gränzen, und zwar 26 ziemlich nahe der größern Schranke, 7,12 noch näher der kleinern.

β) Um die negative Wurzelschranke zu bestimmen, müssen wir in der gegebenen Gleichung x negativ setzen; damit erhalten wir:

$$-x^3 + 912x + 6136 = 0,$$

oder $x^3 - 912x - 6136 = 0$,

welche Gleichung offenbar die Form hat von

$$2)\quad x^3 - Ax - B = 0,$$

weßwegen wir sogleich auf diese übergehen. Hier ist

a) $x^3 - Ax = B$, b) $x^3 - Ax = B$, oder b') $x^3 = Ax + B$,

$x(x^2 - A) = B$, $x^3 > B$, $x^3 > Ax$,

also $x^2 - A < B$, *) $x > \sqrt[3]{B}$; $x^2 > A$,

$x < \sqrt[2]{A + B}$; $x > \sqrt[2]{A}$.

---

*) Vorausgesetzt, daß $x > 1$.

Anmerkung. Von den beiden Wurzelschranken b) und b′) bringt man natürlich immer die größere in Anwendung.

Daher ist für unsere negative Wurzel

$$\beta)\quad x < \sqrt[2]{912+6136}, \qquad x > \sqrt[2]{912}\ (\ldots b')$$
$$< \sqrt[2]{7048}, \qquad > 30{,}2\ldots$$
$$< 84\ \text{(beinahe)};$$

Wirklich liegt der negative Werth obiger Gleichung dieser Gränze ziemlich nahe, indem $x = -33{,}12$; daß die Wurzel von der größern Schranke 84 so weit absteht, erklärt sich daraus, daß in $x(x^2 - A)$ eine multiplikative Funktion von x vernachlässigt worden, und x überdieß, wie wir sehen, hier ziemlich groß ist.

Ist 3) $x^3 + Ax - B = 0$,

so a) $x^3 + Ax = B$, b) $\sqrt[3]{B} > x$ [nach a)],

$x^3 < B$,

$x < \sqrt[3]{B}$; $\sqrt[3]{B^2} > x^2$,

$x\sqrt[3]{B^2} > x^3 > B - Ax$,

$x(A + \sqrt[3]{B^2}) > B$,

$$x > \frac{B}{A + \sqrt[3]{B^2}}.$$

Es sollen die Wurzelschranken bestimmt werden für die Gleichung:

$$x^3 + 11x - 420 = 0.$$

$$\text{a)}\quad x < \sqrt[3]{420}, \qquad \text{b)}\quad x > \frac{420}{11 + \sqrt[3]{(420)^2}},$$
$$< 7{,}48\ldots$$

$$x > \frac{420}{11 + 56\ldots},$$

$$x > \frac{420}{67} > 6{,}27\ldots$$

In der That ist $x = 7$, also gerade zwischen den berechneten Wurzelschranken. Daß diese Schranken so nahe zusammen fallen, könnte man dahin deuten, daß außer 7 keine andere positive Wurzel vorhanden wäre, wenn man nicht wüßte, daß diese Gleichung umgekehrt keine negative Wurzel haben könne. So ist denn zu vermuthen, daß die beiden andern Werthe imaginär seien, was die Rechnung auch bestätigt.

II.

Anwendung der Gleichungen.

§. 106.

Allgemeines.

Wenn eine Größe in solcher Beziehung zu einer oder zu mehreren andern Größen steht, daß mit einer Aenderung dieser letztern auch eine Aenderung der erstern nothwendig bedingt ist, so sagt man, sie sei von diesen abhängig, und nennt sie*) eine Funktion derselben, diese selbst aber eine veränderliche Größe oder eine Variable. Diese Beziehung kann aber eine bestimmte oder eine unbestimmte sein: eine bestimmte heißen wir sie, wenn wir für jede bestimmte Aenderung der Variablen auch die entsprechende bestimmte Aenderung ihrer Funktion anzugeben vermögen, eine unbestimmte aber, wenn wir das nicht können. Diesen Unterschied klar zu machen, kann folgendes einfache Beispiel dienen: der Preis einer Waare ist von der Quantität derselben und von dem Preise einer Maß-Einheit offenbar in bestimmter Weise abhängig, weil man bei jeder bestimmten Angabe über diese Größen auch den entsprechenden bestimmten Preis der Waare anzugeben vermag. Keineswegs ist dieß aber mit der Qualität der Waare der Fall: zwar hängt der Preis sehr wohl auch von dieser ab, indem sich im Allgemeinen wohl sagen läßt, daß der Preis um so höher, je besser die Qualität; aber so lange die Qualität sich nicht bestimmt durch Zahlen ausdrücken läßt, sondern nur Sache mehr oder weniger unbestimmter Schätzung ist, wie z. B. bei verschiedenen Tuchsorten, Weinsorten u. dgl., so lange ist zwar der Preis einer Waare immerhin eine Funktion von ihrer Qualität, aber eine unbestimmte. Mit solchen unbestimmten Funktionen hat nun die Mathematik, eben weil sie nicht durch Zahlen ausdrückbar sind, auch in ihrer Anwendung nichts zu thun; hingegen von bestimmten Funktionen hat sie sowohl früher schon in der Anwendung der Proportionen (wo diese Funktionen Verhältnisse hießen) Gebrauch gemacht, als auch wird sie einen

---

*) Eigentlich und genauer gesprochen nennt man die Zahl so, oder den algebr. Ausdruck, durch welchen sie dargestellt ist.

gleichen Gebrauch davon auch im Folgenden machen, wobei sie sich überdieß nicht an eine bestimmte Form der Funktion bindet wie dort, sondern jede mögliche Form derselben zuläßt.

Ehe wir zu dieser Anwendung selbst kommen, müssen wir erst über diese möglichen Formen der Funktionen das Folgende vorbringen. Im Allgemeinen stellt sich jede Funktion als ein algebraischer Ausdruck dar (und dieser ist es, der eigentlich Funktion heißt), in welchem die Variablen der Funktion durch irgend Rechnungsarten unter sich verbunden sind; durch welche Rechnungsarten aber dieß in jedem einzelnen Falle geschehe, das hängt eben von den Beziehungen ab, in welchen jedesmal die abhängige Größe zu den veränderlichen steht. Darüber nun ist es natürlich unmöglich, etwas Allgemeines zu sagen, und nur an einzelnen bestimmten Beispielen kann gezeigt werden, wie eben in diesen Fällen die Funktionen aus ihren Variablen zusammengesetzt werden. Da wir in den unten folgenden Ansätzen von Gleichungen mehrfach Gelegenheit haben, solche einzelne Funktionen zu bilden (formiren), so mag hier von einzelnen Beispielen um so mehr Umgang genommen werden, als eine eigentliche Anleitung zur Formation mathematischer Funktionen, wie sie Dr. Pollak's vortreffliche Sammlung algebraischer Aufgaben, zweite Abtheilung, enthält, offenbar die Aufgabe dieses Lehrbuches überschreiten würde.

Also die Formation solcher Funktionen vorausgesetzt, gehen wir auf die Anwendung über, die von ihnen gemacht werden kann. Diese ist nun folgende:

Gesetzt, man habe zwei Funktionen, in welchen eine und dieselbe Größe das eine Mal durch diese, das andere Mal durch andere Variable (beide Male in denselben Einheiten) ausgedrückt ist, so sind diese Funktionen als Zahlen-Ausdrücke einer und derselben Größe in denselben Einheiten offenbar einander gleich. Setzt man sie nun in einer Gleichung wirklich einander gleich, so darf wohl die eine oder andere Variable, sei es nun, daß sie bloß in Einem, oder in beiden Ausdrücken (Funktionen) vorkommt, unbestimmt gelassen sein, indem man sie ja doch als die Unbekannte dieser Gleichung zu bestimmen vermag. Oder wenn man von zwei Größen, welche beide mit von den nämlichen zwei Variablen abhängen, je zwei Funktionen hat (in denen also diese zwei Variablen vorkommen), so mögen dieselben ursprünglich unbestimmt gelassen sein; die zwei

Gleichungen, in welchen die zwei Funktionen der einen und die zwei der andern Größe einander gleichgestellt werden, machen ja immerhin die sofortige Bestimmung der zwei Unbekannten möglich.

Diese Gleichungen zwischen je zwei Funktionen einer und derselben Größe dienen also dazu, die eine oder andere ihrer Variablen, welche ursprünglich nicht bekannt ist, daraus zu berechnen.

Was nun die Herstellung einer solchen Gleichung, ihren Ansatz betrifft, so wird dieser nach der Angabe gemacht, d. h. nach der in Worten gegebenen Aussage über die bestehenden Abhängigkeits-Verhältnisse der betreffenden Größen, und umfaßt offenbar folgende drei Stücke:

1) die bestimmte Bezeichnung derjenigen Größe, für welche aus der Angabe zwei verschiedene Funktionen gebildet werden können;
2) die Formation dieser Funktionen;
3) die Gleichsetzung derselben.

Hat man sodann aus der dadurch erhaltenen Gleichung die Unbekannte gefunden, so macht man die Probe und zwar damit, daß man jetzt mit der bestimmten Größe die Bildung des Ansatzes wiederholt und zeigt, daß hiebei wirklich zwei gleiche Zahlen-Ausdrücke derselben Größe entstehen. Diese Probe ist vorzugsweise darum für Anfänger zu empfehlen, weil sie die Formation der Funktionen, die ihnen immer die größte Schwierigkeit macht, mit den bestimmten Zahlen viel leichter und klarer einsehen, als mit den unbestimmten, so daß in der Probe über die vorausgegangenen Aufgaben zugleich eine Vorübung im Ansatze für die folgenden liegt.

Die einigen Beispiele, an welchen wir zeigen wollen, wie das hier Gesagte zur Ausführung komme, und welche, wie sich von selbst versteht, eine eigentliche Beispiel-Sammlung weder ersetzen können noch sollen, werden wir in derselben Ordnung aufführen, in welcher dieß derartige Sammlungen thun, nemlich:

I. Aufgaben, welche auf Gleichungen des ersten Grades führen, und zwar
   1. mit Einer Unbekannten,
   2. mit mehrern,
   3. auf unbestimmte Gleichungen;

II. Aufgaben, welche auf quadratische oder kubische Gleichungen führen.

I. Aufgaben, welche auf Gleichungen des ersten Grades führen.

§. 107.

1. Mit Einer Unbekannten.

1) „Ich habe 8 fl.," sagt A zu B, „wie viel hast Du?" Darauf erwiedert B: „Wenn ich Dir auch den fünften und den sechsten Theil meines Geldes gäbe, so hätten wir doch erst gleich viel." Wie viel hatten nun Beide?

Ansatz. 1) Diejenige Größe, welche, obgleich eine und dieselbe, doch in zwei verschiedenen Funktionen ausgedrückt werden kann, ist hier deutlich genug bezeichnet: es ist nemlich gemäß der Angabe die Summe (A), welche A nach der Mittheilung durch B hätte, dieselbe mit der Summe (B), welche dem B nach eben dieser Mittheilung noch bliebe, mithin $A = B$ die Ur-Gleichung.

2) Bezeichnen wir die Summe, welche B hat, und die wir nicht kennen, mit x fl., so würde, wenn die Mittheilung wirklich geschähe, A davon $\frac{x}{5}$ fl. $+ \frac{x}{6}$ fl. erhalten, während er bereits 8 fl. hat; also hätte er nach der Mittheilung durch B

$$A = \left(8 + \frac{x}{5} + \frac{x}{6}\right) \text{fl.}$$

Aber um eben diese an A abgegebenen Posten $\left(\frac{x}{5} + \frac{x}{6}\right)$ fl. hätte nun B weniger als ursprünglich, also wäre

$$B = \left[x - \left(\frac{x}{5} + \frac{x}{6}\right)\right] \text{fl.}$$

3) Da gemäß 1) $A = B$,

so auch: $8 + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = x - \left(\frac{x}{5} + \frac{x}{6}\right)$.

Auflösung. $8 + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = x - \frac{x}{5} - \frac{x}{6}$,

$$8 = x - \frac{2x}{5} - \frac{x}{3},$$

$$8 = x - \frac{11x}{15} = \frac{4x}{15},$$

$$30 = x.$$

Probe. Gäbe B von seinen 30 fl. den 5ten Theil = 6 fl. und den 6ten = 5 fl. dem A, so hätte dieser (8 + 6 + 5) fl. = = 19 fl.; dem B aber blieben (30 — 6 — 5) fl. = 19 fl.: mithin sind diese beiden Summen wirklich eine und dieselbe.

---

2) Die Zahl 100 besteht aus zwei Theilen, deren Größen-Verhältniß aus Folgendem zu entnehmen ist: wenn ich den einen Theil mit 3, den andern aber mit $2^1/_2$ multiplizire, so ist die Summe dieser Produkte um 6 größer als die, welche ich erhielte, wenn ich beide Theile mit $2^3/_4$ multiplizirte und diese Produkte addirte. Welches sind sonach diese Theile?

Ansatz. 1) Werden mit den beiden Theilen einerseits die zuerst, andrerseits die zuletzt angegebenen Rechnungs-Operationen vorgenommen, so ergeben sich gewisse Resultate; sei R_1 das eine, R_2 das andere, so folgt aus der Angabe, gemäß welcher das erste um 6 größer als das zweite ist, daß ihre Differenz = 6 sei, daß also

$$R_1 - R_2 = 6.$$

2) Bezeichnen wir den einen Theil, weil wir ihn nicht kennen, mit x, so ist offenbar der andete (100 — x), mithin ist, wenn ich nach der Angabe verfahre,

$$R_1 = 3x + 2\frac{1}{2}(100 - x),$$

$$R_2 = 2\frac{3}{4}(x + 100 - x).$$

3) Gemäß 1) ist $R_1 - R_2 = 6$,

$$\text{also } 3x + 2\frac{1}{2}(100 - x) - 2\frac{3}{4} \cdot 100 = 6,$$

Auflösung. $3x + 250 - \frac{5x}{2} - 275 = 6,$

$$6x + 500 - 5x - 550 = 12,$$

$$x = 62.$$

Probe. Es ist also der eine Theil 62, der andere 38. Im erstern Falle erhalte ich:

$$3 \cdot 62 + \frac{5}{2} \cdot 38 = 186 + 95 = 281 = R_1,$$

im letztern:

$$2\frac{3}{4} \cdot 100 = 275 = R_2;$$

mithin ist $R_1 - R_2 = 281 - 275 = 6$, wie oben.

---

3) Jemand vermacht sein Vermögen an seine drei Erben in der Art, daß A den 6ten Theil erhalte und 400 fl., B den 4ten Theil und 500 fl., C den Rest, der gerade den 3ten Theil und 600 fl. ausmacht. Wie groß war das Vermögen, und wie viel erhielt ein Jeder?

Ansatz. 1) Da mit den angegebenen drei Erbtheilen das Gesammtvermögen vertheilt ist, das Ganze aber dieselbe Zahl mit der Summe aller seiner Theile ist, so haben wir, wenn wir die Theile mit A, B, C, das ganze Vermögen mit V bezeichnen,

$$V = A + B + C.$$

2) Bezeichnen wir V als Unbekannte mit x, so ist eben ganz einfach nach der Angabe

$$A = \frac{x}{6} + 400,$$

$$B = \frac{x}{4} + 500,$$

$$C = \frac{x}{3} + 600,$$

$$\text{mithin } A + B + C = \frac{3x}{4} + 1500.$$

3) Da gemäß 1) $V = A + B + C$,

$$\text{so } x = \frac{3x}{4} + 1500.$$

Auflösung. $4x = 3x + 6000$,

$$x = 6000.$$

Probe. Von diesen 6000 fl. erhält A 1000 fl. und 400 fl. = 1400 fl.,
B 1500 fl. und 500 fl. = 2000 fl.,
C 2000 fl. und 600 fl. = 2600 fl.;

in der That macht die Summe dieser Theile: 6000 fl.

---

4) Es soll eine gewisse Anzahl von Stücken unter eine gewisse Anzahl von Personen vertheilt werden. Man zählt aus, und es findet sich, daß, wenn jede Person 9 Stücke erhält, noch 4 Stücke übrig bleiben; da sich aber unterdessen eine Person entfernt hat, so treffen bei der nun wirklich vorgenommenen Theilung jede Person 10 Stücke, und bleiben dessen ungeachtet

noch 6 Stücke übrig. Wie viele Personen waren es Anfangs, und wie viele Stücke waren zu vertheilen?

Ansatz. 1) Die Anzahl der Stücke bleibt dieselbe, sie mögen vertheilt werden, wie sie wollen. Bezeichnen wir also diese Anzahl, wie sie sich nach der ersten Theilungsart formulirt, mit A_1, nach der zweiten mit A_2, so ist

$$A_1 = A_2.$$

2) Ist die Anzahl der im Anfange vorhandenen Personen x, so ist, weil jede Person 9 Stücke, also alle zusammen 9x erhalten, und noch 4 darüber da sind,

$$A_1 = 9x + 4;$$

aber von $(x - 1)$ Personen, sagt die Angabe, erhält jede 10 Stücke, was zusammen $(x - 1)$ 10 Stücke gibt, und da noch 6 Stücke darüber sind, so ist

$$A_2 = (x - 1)\,10 + 6.$$

3) Gemäß 1) ist $A_1 = A_2$,

mithin $9x + 4 = (x - 1)\,10 + 6.$

Auflösung. $9x + 4 = 10x - 10 + 6,$

$$8 = x.$$

Probe. Weil von 8 vorhandenen Personen gemäß der ersten Theilung jede 9 Stücke erhält und noch 4 Stücke darüber sind, so müssen es $8 \cdot 9 + 4 = 76$ Stücke sein. In der That, wenn diese gemäß der zweiten Theilung unter nur mehr 7 Personen vertheilt werden, treffen offenbar 10 Stücke auf jede Person, und bleiben deren 6 übrig, wie es auch die Angabe besagt.

---

5) Jemand läßt ein Stück Leinwand zu 36 Ellen wirken; als Wirkerlohn überläßt er dem Weber 4 Ellen davon. Ein anderes Mal will er in gleicher Weise abkommen und dem Weber für ein Stück von 50 Ellen den Arbeitslohn mit 5 Ellen bezahlen; jedoch der Letztere, ein besserer Rechner, findet, daß ihm noch 20 kr. gebühren, wenn die Elle Leinwand eben so hoch angeschlagen werde als im ersten Falle, während natürlich der Wirkerlohn für die Elle ohnehin der nemliche sei. Wie hoch ist die Elle Leinwand angeschlagen, und welches ist der Wirkerlohn?

Ansatz. 1) Der Wirkerlohn für die Elle ist in beiden Fällen derselbe; die Ausdrücke also, welche sich dafür aus den beiderseitigen Angaben formiren lassen, etwa A_1 und A_2, sind einander gleich.

2) Ist der Preis einer Elle xkr., so ist der Gesammt-Arbeitslohn im ersten Falle 4x kr., mithin für die Elle $= \frac{4x}{36}$ kr. $= \frac{x}{9}$ kr. $= A_1$.

Im zweiten Falle ist der ganze Wirkerlohn $= (5x + 20)$ kr., mithin für die Elle $= \frac{5x + 20}{50}$ kr. $= A_2$.

3) Mithin ist nach 1);

$$\frac{x}{9} = \frac{5x + 20}{50}.$$

Auflösung. $50x = 45x + 180$,

$$5x = 180,$$

$$x = 36.$$

Probe. Die Elle Leinwand ist somit zu 36 kr. angeschlagen, womit sich, den Wirkerlohn zu 4 Ellen angenommen, hiefür 4 . 36 kr., und für die Elle $\frac{4 . 36}{36} = 4$ kr. herausstellt. Im zweiten Falle ist daher der Wirkerlohn für 50 Ellen $= 4 . 50 = 200$ kr. $= 3$ fl. 20 kr.; da nun 5 Ellen à 36 kr. nur 3 fl. ausmachen, so müssen offenbar noch 20 kr. darauf bezahlt werden.

---

6) Drei Ursachen bringen in den Zeiten t_1, t_2, t_3 nach einander die Wirkungen e_1, e_2, e_3 hervor: in welcher Zeit werden sie zusammen die Wirkung E hervorbringen?

Ansatz. 1) Jede einzelne Ursache bringt einen Theil der Gesammtwirkung hervor und zwar entsprechend der von ihr entwickelten Wirksamkeit: diese theilweisen Wirkungen sind zusammen = der Gesammtwirkung, darauf beruht die Gleichung:

2) Ist die Zeit, während welcher die drei Ursachen zusammen die Wirkung E hervorbringen sollen, etwa $= x$, so gilt:

a) $t_1 : x = e_1 : v_1$, woraus die partielle Wirkung $v_1 = \frac{e_1 x}{t_1}$,

b) $t_2 : x = e_2 : v_2$, " " " " " $v_2 = \frac{e_2 x}{t_2}$,

c) $t_3 : x = e_3 : v_3$, " " " " " $v_3 = \frac{e_3 x}{t_3}$,

3) Gemäß 1) ist:

$$v_1 + v_2 + v_3 = E,$$

$$\text{mithin } \frac{e_1 x}{t_1} + \frac{e_2 x}{t_2} + \frac{e_3 x}{t_3} = E.$$

$$\text{Auflösung. } x = \frac{E t_1 t_2 t_3}{e_1 t_2 t_3 + e_2 t_1 t_3 + e_3 t_1 t_2}.$$

Z. B. Ein Faß würde durch ein erstes Spundloch in 2 Stunden geleert werden, durch ein zweites in 3, durch ein drittes in 4 Stunden: in welcher Zeit würde es durch alle drei zugleich geleert werden?

Auflösung. Hier ist $e_1 = e_2 = e_3 = E$, d. h. die beabsichtigte Wirkung ist in jedem Falle die Ausleerung des ganzen Fasses; mithin ist

$$x = \frac{2.3.4}{3.4 + 2.4 + 2.3} = \frac{24}{12 + 8 + 6} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \text{ Stunden.}$$

---

7) Eine Reihe von Aufgaben bilden in den Beispiel-Sammlungen gewöhnlich diejenigen, welche von der Bewegung zweier Gegenstände bis zu ihrer Begegnung hergenommen sind. Die allgemeine Gleichung ist hiebei,

a) wenn sich die Gegenstände hinter einander bewegen: $d = W_2 - W_1$, wo d die Entfernung der beiden Abgangsorte, W_1 den Weg des zuerst Abgegangenen, W_2 den des zweiten bedeutet;

b) wenn die Körper sich gegen einander bewegen: $d = W_1 + W_2$, wo die Bedeutungen dieselben sind, nur daß es auf eine bestimmte Unterscheidung von W_1 und W_2 hier nicht ankommt.

Die Hauptschwierigkeit hiebei ist immer die Darstellung von W_1 und W_2, welche natürlich beide in derselben Einheit ausgedrückt sein müssen. Von den verschiedensten hier möglichen Angaben wählen wir etwa das bekannte, von den Hunds- und Hasensprüngen.

Ein Hund verfolgt einen Hasen — der Hase hat 50 Sprünge voraus; so oft der Hase 6 Sprünge macht, macht der Hund deren 5, aber 7 Hundssprünge machen so viel aus als 9 Hasensprünge. Wie viele Sprünge kann der Hase noch machen, bis der Hund ihn einholt?

Ansatz. 1) Die Grundgleichung ist nach a):

$$d = W_2 - W_1,$$

wo W_2 der Weg des Hundes, W_1 der des Hasen.

2) Nehmen wir an, der Hase mache noch x Sprünge, so ist $W_1 = x$ Hasensprünge; aber gemäß $6 : 5 = x : y$ macht der Hund in derselben Zeit $y = \frac{5x}{6}$ Hundssprünge $= W_2$.

Ehe wir aber diese Funktion in die Gleichung setzen können, müssen die Hundssprünge noch in Hasensprünge verwandelt werden; das geschieht nach $7 : 9 = \frac{5x}{6} : z$, woraus $z = W_2 = \frac{15x}{14}$ Hasensprünge.

3) Nun ist gemäß 1):

$$50 = \frac{15x}{14} - x.$$

Auflösung. $x = 700$.

Probe. Der Hase macht also noch 700 Sprünge, daher der Hund in derselben Zeit gemäß:

$$6 : 5 = 700 : y, \text{ woraus } y = \frac{350 \cdot 5}{3},$$

$\frac{1750}{3}$ Hundssprünge. Diese durch $\frac{1750}{3} \cdot \frac{9}{7} = 750$ in Hasensprünge verwandelt, ist der Weg des Hundes in derselben Zeit $= 750$ Hasensprünge, und Hund und Hase sind nun offenbar an derselben Stelle.

---

§. 108.

2. Mit mehreren Unbekannten.

1) In meinen beiden Händen habe ich Geld; wie viel, das soll aus folgenden Angaben bestimmt werden: Würde ich 11 kr. aus der linken in die rechte bringen, so hätte ich überall gleich viel; würde ich aber umgekehrt 8 kr. aus der rechten in die linke thun, so hätte ich in der linken Hand dreimal so viel als in der rechten.

Ansatz. 1) Jeder Wechsel, den ich mit dem Gelde in meinen Händen vornehme, bringt seine Gleichung mit sich, durch welche

eben das jeweilig bestehende Verhältniß zwischen den Beträgen in der linken und in der rechten Hand ausgesprochen wird. Bezeichnen wir nun diese Beträge im ersten Falle mit L_1 und R_1, im zweiten mit L_2 und R_2, so haben wir offenbar die Gleichungen:

$$1.\ L_1 = R_1,$$
$$2.\ L_2 = 3R_2.$$

2) Es seien ursprünglich x kr. in der linken, y in der rechten Hand:

1. Nehme ich nun aus der linken 11 kr., so sind noch $(x - 11)$ kr. $= L_1$ darin; in der rechten aber werden, wenn ich diese 11 kr. in dieselbe thue, jetzt $(y + 11)$ kr. $= R_1$ sein.
2. Thue ich aber 8 kr. aus der rechten Hand in die linke, so werden in ersterer noch $(y - 8)$ kr. $= R_2$, in letzterer nun $(x + 8)$ kr. $= L_2$ sein.

3) Werden die in 2) entwickelten Werthe von L_1 und R_1, und L_2 und R_2 in die Gleichungen von 1) substituirt, so erhalten wir:

$$1.\ x - 11 = y + 11;$$
$$2.\ x + 8 = 3(y - 8).$$

Auflösung. $x = 49$; $y = 27$.

Probe. 1. Bringe ich von den 49 kr., die ich in der linken Hand habe, 11 in die rechte, so sind in dieser, in welcher zuvor schon 27 kr. waren, nun $27 + 11 = 38$ kr., in jener aber nur mehr $49 - 11 = 38$ kr., also in beiden Händen gleich viel.

2. Nehme ich von den 27 kr. der rechten Hand 8 kr. hinweg, so sind noch $27 - 8 = 19$ kr. darin; bringe ich nun diese 8 kr. in die linke, so sind in dieser $49 + 8 = 57$ kr. Da aber $57 = 3 \cdot 19$, so ist wirklich in der linken Hand dreimal so viel Geld als in der rechten, wie es die Angabe verlangt.

---

2) Ein Krämer erhält eine Lieferung von 3 Zentnern Zucker und 1 Zentner 40 ℔ Kaffee, und bezahlt dafür 177 fl. Beim Verkaufe löst er aber bereits aus $2^1/_2$ Zentnern Zucker und 1 Zentner 3 ℔ Kaffee die gleiche Summe, indem er das ℔ Zucker um 6, das ℔ Kaffee um 7 kr. theuerer verkauft. Wie theuer hat er gekauft und verkauft?

Ansatz. 1) Der Preis gewisser Quantitäten Zucker und Kaffee beträgt 1. beim Einkaufe, 2. beim Verkaufe 177 fl.; das gibt die

zwei Grundgleichungen. Bezeichnen wir nemlich 1. beim Einkaufe den Preis des Zuckers mit A, den des Kaffee's mit B, 2. beim Verkaufe den Preis des Zuckers mit A', den des Kaffee's mit B', so ist:

$$1.\ A + B = 177 \text{ fl.}$$
$$2.\ A' + B' = 177 \text{ fl.}$$

2) Kostet 1. das ℔ Zucker beim Einkaufe xkr., das ℔ Kaffee ykr., so ist:

$$A = 300\,x\text{kr.}, \text{ und } B = 140y;$$

aber 2. beim Verkaufe kommt nun das ℔ Zucker auf $(x + 6)$ kr., das ℔ Kaffee auf $(y + 7)$ kr., mithin ist:

$$A' = 250\,(x + 6),\ B' = 103\,(y + 7).$$

3) Diese Werthe in die Gleichungen sub 1) substituirt, erhalten wir:

$$1.\ 300x + 140y = 177 \,.\, 60;$$
$$2.\ 250\,(x + 6) + 103\,(y + 7) = 177 \,.\, 60.$$

Auflösung. $x = 20;\ y = 33.$

Probe. 1. 3 Zt. Zucker, das ℔ zu 20 kr. machen 100 fl.
1 Zt. 40 ℔ Kaffee, das ℔ zu 33 kr. „ 77 fl.

Summa 177 fl.

2. $2^1/_2$ Zt. Zucker, das ℔ zu 26 kr. machen 108 fl. 20 kr.
1 Zt. 3 ℔ Kaffee, das ℔ zu 40 kr. „ 68 fl. 40 kr.

Summa 177 fl. — kr.

---

3) Von drei Ursachen, A, B und C, bringen A und B in a Zeiten eine gewisse Wirkung hervor, A und C zusammen in b, B und C zusammen in c Zeiten. In welcher Zeit bringt jede Ursache einzeln diese Wirkung hervor? in welcher alle drei zugleich?

Ansatz. 1) Eine erste Gleichung erhält man aus der Aussage, daß die Summe der partiellen Wirkungen von A und B in a Zeiten gleich der Gesammt-Wirkung sei; eine zweite aus der gleichen Aussage über die partiellen Wirkungen von A und C; eine dritte aus der über die Wirkungen von B und C.

2) Bezeichnen wir die Zeiten, in welchen die einzelnen Ursachen, jede für sich allein, die Gesammtwirkung E hervorbringen, für A mit x, für B mit y, für C mit z, so bringt

1. A in a Zeiten die partielle Wirkung $\frac{a}{x} . E$ hervor,

B „ a „ „ „ „ „ $\frac{a}{y} . E$;

2. A „ b „ „ „ „ „ $\frac{b}{x} . E$,

C „ b „ „ „ „ „ $\frac{b}{z} . E$;

3. B „ c „ „ „ „ „ $\frac{c}{y} . E$,

C „ c „ „ „ „ „ $\frac{c}{z} . E$.

3) Setzt man mit diesen partiellen Wirkungen die Gleichungen nach 1) an, so erhält man:

1. $\frac{a}{x} . E + \frac{a}{y} . E = E$ oder $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = 1$;

2. $\frac{b}{x} . E + \frac{b}{z} . E = E$ oder $\frac{b}{x} + \frac{b}{z} = 1$;

3. $\frac{c}{y} . E + \frac{c}{z} . E = E$ oder $\frac{c}{y} + \frac{c}{z} = 1$.

Auflösung. $x = \frac{2abc}{-ab + ac + bc}$,

$$y = \frac{2abc}{ab - ac + bc},$$

$$z = \frac{2abc}{ab + ac - bc}.$$

Damit ist denn die Antwort auf die erste Frage gegeben; es ist aber noch die zweite übrig. Bezeichnen wir nun die hier fragliche Zeit, d. h. diejenige, in welcher alle drei Ursachen zugleich die Gesammt-Wirkung E hervorbringen, mit u, so ist in derselben Zeit

die partielle Wirkung von $A = \frac{u}{x} . E$,

„ „ „ „ „ $B = \frac{u}{y} . E$,

„ „ „ „ „ $C = \frac{u}{z} . E$,

mithin $\frac{u}{x} . E + \frac{u}{y} . E + \frac{u}{z} . E = E$ oder $\frac{u}{x} + \frac{u}{y} + \frac{u}{z} = 1$.

Auflösung. Es ist

$$\frac{1}{x} = \frac{-ab+ac+bc}{2abc},$$

$$\frac{1}{y} = \frac{ab-ac+bc}{2abc},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{ab+ac-bc}{2abc}, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{ab+ac+bc}{2abc},$$

$$\text{also } \frac{u}{x}+\frac{u}{y}+\frac{u}{z} = \frac{u(ab+ac+bc)}{2abc} = 1,$$

$$\text{woraus } u = \frac{2abc}{ab+ac+bc}.$$

Z. B. Ein Behälter soll durch drei Röhren gefüllt werden; die erste und zweite würden ihn zusammen in 8 Stunden füllen, die erste und dritte in 6 Stunden, die zweite und dritte in 4 Stunden; in welcher Zeit wird er durch die drei Röhren zugleich gefüllt werden?

$$\text{Es ist } u = \frac{2.8.6.4}{8.6+8.4+6.4} = \frac{384}{104} = \frac{48}{13} = 3\frac{9}{13} \text{ St.}$$

---

4) Eine Reihe hieher gehöriger Aufgaben bilden die bestimmten Mischungs-Aufgaben; *) wir setzen eine hieher, nemlich:

Ein Metallarbeiter hat zwei Sorten Neusilber, eine, in welcher $^1/_2$ Kupfer, $^1/_4$ Nickel und $^1/_4$ Zink, eine zweite, in welcher auf 3 Theile Kupfer je 1 Theil Nickel und 1 Theil Zink kommen. Er will aber durch Legirung eine dritte Sorte herausbringen, welche 55% Kupfer, 22% Nickel und 23% Zink enthalte. Wenn er zu diesem Zwecke zu den beiden Sorten Neusilber noch Messing setzt, welches aus 65% Kupfer und 35% Zink besteht, wie viel muß er von jedem der drei Metall-Stücke nehmen, um 10 ℔ Neusilber von der gewünschten Zusammensetzung zu erhalten?

Ansatz. 1) Die drei Gleichungen erhält man aus folgenden drei Angaben:

---

*) Bestimmte heißen sie hier zum Unterschiede von den unbestimmten Mischungs-Aufgaben des folgenden §.

1. Die Quantität Kupfer, welche aus den drei Stücken genommen wird, muß von den 10 ℔ 55% betragen, mithin

$$= 10 \cdot \frac{55}{100} = \frac{11}{2} \text{ ℔ sein;}$$

2. die Quantität Nickel $= 10 \cdot \frac{22}{100} = \frac{11}{5}$ ℔;

3. „ „ Zink $= 10 \cdot \frac{23}{100} = \frac{23}{10}$ ℔.

2) Bezeichnet man die Anzahl der Pfunde, die von der ersten Sorte Neusilber genommen werden müssen, mit x, die von der zweiten, mit y, vom Messing, mit z, so erhält man:

aus dem ersten Stücke $\frac{x}{2}$ K., $\frac{x}{4}$ N., $\frac{x}{4}$ Z.,

„ „ zweiten „ $\frac{3y}{5}$ K., $\frac{y}{5}$ N., $\frac{y}{5}$ Z.,

„ „ dritten „ $\frac{65z}{100}$ K., 0 N., $\frac{35z}{100}$ Z., Alles in Pfunden.

3) Demnach ist gemäß 1):

$$1.\ \frac{x}{2} + \frac{3y}{5} + \frac{65z}{100} = \frac{11}{2},$$

$$2.\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} = \frac{11}{5},$$

$$3.\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{35z}{100} = \frac{23}{10}.$$

Auflösung. $x = 5^1/_7$,
$y = 4^4/_7$,
$z = {}^2/_7$,

d. h. man hat von der ersten Sorte Neusilber $5^1/_7$ ℔ zu nehmen, von der zweiten $4^4/_7$ ℔, und vom Messing bloß $^2/_7$ ℔.

---

5) Der Inhalt von 4 Fässern soll durch folgende Angaben bestimmt werden:

1. Würde man das erste leere durch das zweite volle Faß füllen, so bliebe in diesem noch $^5/_{12}$ seines Inhaltes;
2. würde man ebenso das zweite durch das dritte füllen, so bliebe diesem $^1/_5$ seines Inhaltes,
3. dem vierten aber $^1/_3$, wenn man daraus das leere dritte füllte;

4. wollte man aber endlich das leere vierte Faß aus dem ersten füllen, so gingen daran 62 Maß ab.

Ansatz. Bezeichnen wir den Inhalt der vier Fässer in Maßen nach einander mit x, y, z, v, so geben obige vier Angaben in die algebraische Sprache übergetragen folgende vier Gleichungen:

$$1.\ y - x = \frac{5}{12}\,y,$$

$$2.\ z - y = \frac{1}{5}\,z,$$

$$3.\ v - z = \frac{1}{3}\,v,$$

$$4.\ x - v = -62,$$

woraus $x = 28$,

$y = 48$,

$z = 60$,

$v = 90$.

Die Probe mag man sich leicht selbst machen.

---

§. 109.

3. Unbestimmte Aufgaben.

1) Die Summe von 100 fl. soll in Kronenthalern und Vereinsthalern bezahlt werden; wie viele Stücke braucht man hiezu von beiden?

Ansatz. Es seien x Kronenthaler und y Vereinsthaler nöthig; diese müssen in Gulden ausgedrückt zusammen 100 fl. ausmachen. Nun sind x Krthlr. $= \frac{27x}{10}$ fl., y Vthlr. $= \frac{7y}{2}$ fl., mithin

$$\frac{27x}{10} + \frac{7y}{2} = 100.$$

Auflösung. $27x + 35y = 1000$,

$$x = 37 - y - \frac{8y - 1}{27},$$

$$1.\ x = 37 - y - A.$$

$$\frac{8y - 1}{27} = A,$$

$$8y = 27A + 1;$$

$$y = 3A + \frac{3A + 1}{8},$$

$$2.\ y = 3A + B.$$

$$\frac{3A+1}{8} = B,$$

$$3A = 8B - 1,$$

$$A = 2B + \frac{2B-1}{3},$$

3. $$A = 2B + C.$$

$$\frac{2B-1}{3} = C,$$

$$2B = 3C + 1,$$

$$B = C + \frac{C+1}{2},$$

4. $$B = C + D.$$

$$\frac{C+1}{2} = D,$$

5. $$C = 2D - 1.$$

Nun nach einander in die Gleichungen 4, 3, 2, 1 substituirt, erhalten wir:

4. $B = 3D - 1;$
3. $A = 8D - 3;$
2. $y = 27D - 10;$
1. $x = 50 - 35D.$

Hier kann D nur $= 1$ sein; dann ist:

$$x = 50 - 35 = 15;$$
$$y = 27 - 10 = 17.$$

Probe. 15 Kronenthaler machen 40 fl. 30 kr.
17 Vereinsthaler „ 59 fl. 30 kr.

Summa 100 fl. — kr.

---

2) Jemand bezahlte für 11 ℔ Zucker, 5 ℔ Kaffee und 6 ℔ Reis 10 fl. 5 kr.; ein anderes Mal für 25 ℔ Zucker, 12 ℔ Kaffee und 10 ℔ Reis 22 fl. 18 kr.: was wird wohl das ℔ von jeder Gattung dieser Waaren gekostet haben?

Ansatz. Hat das Pfund Zucker x kr. gekostet, Kaffee y kr., Reis z kr., so haben wir, wenn Alles in Kreuzern ausgedrückt wird, folgende Gleichungen:

1) $11x + 5y + 6z = 605,$
2) $25x + 12y + 10z = 1338.$

Auflöſung. 1) $\underset{(-)}{55x} + \underset{(-)}{25y} + \underset{(-)}{30z} = 3025$,

2) $75x + 36y + 30z = 4014$;

$$20x + 11y = 989,$$

woraus $y = 89 - x - \frac{9x - 10}{11}$,

1. $y = 89 - x - A.$

$$\frac{9x - 10}{11} = A,$$

$$9x = 11A + 10,$$

$$x = A + 1 + \frac{2A + 1}{9},$$

2. $x = A + 1 + B.$

$$\frac{2A + 1}{9} = B,$$

$$A = 4B + \frac{B - 1}{2},$$

3. $A = 4B + C.$

$$\frac{B - 1}{2} = C,$$

4. $B = 2C + 1.$

Nun in 3, 2, 1 ſubſtituirt, wird:

3. $A = 9C + 4;$

2. $x = 11C + 6;$

1. $y = 79 - 20C.$

Dieſe Werthe von x und y müſſen nun noch in die Gleichung 1) geſetzt werden, damit auch z in ganzen Zahlen dargeſtellt werde. Dabei erhält man:

$$11(11C + 6) + 5(79 - 20C) + 6z = 605,$$

$$121C + 66 + 395 - 100C + 6z = 605,$$

$$6z = 144 - 21C,$$

$$2z = 48 - 7C,$$

5. $z = 24 - 3C - \frac{C}{2}.$

$$\frac{C}{2} = D,$$

6. $C = 2D.$

Damit wieder in 5, 2 und 1 substituirt, erhalten wir für unsere Unbekannten die gesuchten Werthe in ganzen Zahlen, nemlich:

$$x = 22D + 6,$$
$$y = 79 - 40D,$$
$$z = 24 - 7D.$$

Setzen wir hier $D = 0$, was algebraisch möglich ist, so erhalten wir die unwahrscheinlichen Werthe:

$$x = 6,$$
$$y = 79,$$
$$z = 24,$$

d. h. das Pfund Zucker sollte 6 kr., Kaffee 1 fl. 19 kr., Reis 24 kr. gekostet haben, welche Preise denn doch dem wirklichen Preisverhältnisse dieser Waaren zu wenig nahe kommen, als daß man sie für richtig annehmen könnte. Wir setzen also $D = 1$, wobei

$$x = 28,$$
$$y = 39,$$
$$z = 17$$

wird, und da diese Preise ganz annehmbar, so ist damit Eine Lösung unserer Aufgabe gegeben; weil aber, wenn $D = 2$, $y = -1$, also negativ würde, so ist diese Lösung zugleich auch die einzig mögliche.

Die Probe zur Uebung!

---

3) Die Stärke eines Regimentes soll aus folgenden Angaben bestimmt werden: dasselbe kann, ohne daß ein Mann übrig bleibt, 14 und 15 Mann hoch aufgestellt werden; wollte man es aber 13 oder 18 Mann hoch aufstellen, so wären es in beiden Fällen 6 Mann zu wenig.

Ansatz. Der erste Theil der Angabe sagt nichts Anderes, als daß die Zahl, welche die Stärke des Regimentes angibt, sowohl durch 14 als durch 15, mithin auch durch das Produkt $14 . 15 = 210$ theilbar ist; der zweite Theil aber sagt, daß man zu dieser Zahl noch 6 addiren müße, damit die dadurch erhaltene Zahl durch 13 sowohl als durch 18, mithin durch $13 . 18 = 234$ theilbar sei. Dieß algebraisch ausgedrückt gibt folgende zwei Gleichungen, wobei die Stärke des Regimentes mit x bezeichnet ist:

$$1)\quad \frac{x}{210} = A,$$

$$2)\quad \frac{x+6}{234} = B.$$

Auflöſung. 1) $x = 210A$,

2) $x = 234B - 6$,

mithin $210A = 234B - 6$,

$$A = B + \frac{24B-6}{210},$$

$$= B + \frac{4B-1}{35},$$

1. $A = B + C.$

$$\frac{4B-1}{35} = C,$$

$$B = 8C + \frac{3C+1}{4},$$

2. $B = 8C + D.$

$$\frac{3C+1}{4} = D,$$

$$C = D + \frac{D-1}{3},$$

3. $C = D + E.$

$$\frac{D-1}{3} = E,$$

4. $D = 3E + 1.$

Hiemit in 3, 2, 1 und 1) ſubſtituirt, erhalten wir nach einander:

3. $C = 4E + 1,$

2. $B = 35E + 9,$

1. $A = 39E + 10,$

1) $x = 8190E + 2100,$

womit denn x als eine ganze Zahl dargeſtellt iſt.

Nehmen wir hier $E = 0$, ſo iſt $x = 2100$ Mann, ein ganz paſſendes Reſultat; nehmen wir aber, was wir algebraiſch wohl können, $E = 1$, ſo wird $x = 10290$ Mann, eine Zahl, welche ſo weit über die gewöhnliche Stärke eines Regimentes hinausgeht, daß ſie gar nicht mehr annehmbar erſcheint. Noch mehr aber gilt das von den noch größern Zahlen, welche man für x erhält, wenn man $E = 2$, oder $E = 3$ u. ſ. w. ſetzt.

4) Hieher gehören auch die sogenannten unbestimmten Mischungs-Aufgaben, welche schon die Arithmetik freilich auf bloß mechanischem Wege durch die sogenannte wechselnde Verbindungs-Regel aufzulösen lehrt.

Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) es sind die Werthe (Preise) der Mischung sowohl als der zu vermischenden Dinge gegeben, und soll bloß das Verhältniß angegeben werden, nach welchem die zu vermischenden Dinge in die Mischung aufzunehmen sind;

b) es ist außerdem noch entweder die Quantität der ganzen Mischung oder die eines der Mischungstheile gegeben, und sollen die übrigen Mischungsquantitäten bestimmt werden.

Hiebei verfährt die Arithmetik nach folgenden Regeln:

a) Um die Verhältnißzahlen der Mischung zu bestimmen, suche man

1) die Differenz zwischen dem Mischungspreise und dem Preise je einer der höhern Sorten;
2) die Differenz zwischen dem Mischungspreise und dem Preise je einer der niedern Sorten,

und setze hierauf erstere Differenz als Verhältnißzahl der niedern, letztere als Verhältnißzahl der höhern Sorte an. Mit der Bestimmung solcher Differenzen-Paare hat man natürlich so lange fortzufahren, bis für jede Sorte (mit diesem Worte bezeichnen wir kurzweg die zu vermischenden Dinge) eine Verhältnißzahl gefunden ist. Dabei muß, wenn nicht gerade ebenso viele höhere als niedere Sorten vorhanden sind, die eine oder andere Sorte mehrmals zur Bestimmung solcher Differenzen beigezogen werden; ist dieß der Fall, so gilt für die mehrere Male beigezogene die Summe aller für sie gefundenen Verhältnißzahlen als ihre Verhältnißzahl.

Was den Grund dieser etwas komplizirten Regel betrifft, so ist dieselbe, wenn bloß zwei Dinge zu vermischen sind, der einfache Ausdruck desjenigen Resultates, welches man erhält, wenn man die den betreffenden Mischungsfall darstellende unbestimmte Gleichung mit zwei Unbekannten auflöst. So weit ist daher die gemeine Regel auch strenge richtig und gibt dasselbe Resultat wie die algebraische Lösung. Ganz anders aber ist es, wenn es sich um die

Mischung mehr als zweier Dinge handelt. Für diesen Fall ist die Regel ganz mechanisch aus dem Versuche entstanden, die für die Mischung zweier Dinge richtig befundene Regel auch auf die Mischung mehrerer Dinge auszudehnen; da sich nun hiebei, wie die hinterher gemachte Probe auswies, ganz richtige Mischungs-Verhältnisse ergaben, so blieb man bei diesem Versuche stehen und nahm ihn als förmliche Regel an. In der That gibt diese Regel ein richtiges Resultat, aber damit hat man eben nur Eine von den vielen Lösungen, deren eine solche Aufgabe fähig ist, und welche die aus dem betreffenden Mischungsfalle angesetzte unbestimmte Gleichung mit mehrern Unbekannten alle gibt.

b) Sind auch die Mischungs-Quantitäten zu bestimmen, so sucht die Arithmetik erst nach Regel a) die betreffenden Verhältnißzahlen und hierauf vermittelst der Repartitions-Rechnung die entsprechenden Quantitäten.

Die Algebra aber setzt in allen Fällen aus der Angabe einfach ihre Gleichungen an, und löst dieselben, sie mögen nun bestimmte oder unbestimmte sein, nach den bekannten allgemeinen Regeln auf, ohne irgend besonderer Regeln für diese Mischungsfälle zu bedürfen. Z. B.:

a) Es soll 13-, 10- und 6löthiges Silber zu 11löthigem zusammen geschmolzen werden; in welchen Verhältnissen hat die Mischung zu geschehen?

Ansatz. 1) Wenn die drei Stücke Metall in Eines zusammen geschmolzen werden, so enthält dieses Eine natürlich die nämliche Menge von Silber wie die drei Stücke zusammen; die Ausdrücke also, welche dieses nämliche Quantum Silber im einen und im andern Falle darstellen, sind einander gleich.

2) Ist das gesuchte Mischungsverhältniß der drei Stücke etwa $x : y : z$, so sagt dieß: wenn vom ersten Stücke x Mark genommen werden, so müssen vom zweiten y, vom dritten z Mark genommen werden. Damit können wir aber auch die Quantitäten Silbers, die von jedem Stücke in die Mischung kommen, und ebenso die Quantität bestimmt formuliren, welche die Mischung selbst enthält. Das erste Stück nemlich enthält in einer Mark 13 Loth Silber (daher der Ausdruck 13löthig), also in x Mark $13x$ Loth.; ebenso

das zweite in y Mark 10 y Loth, das dritte in z Mark 6 z Loth. Die Mischung aber besteht aus $(x + y + z)$ Mark, und da die Mark 11 Loth Silber enthalten soll, so muß der Silbergehalt derselben $11 (x + y + z)$ Loth betragen.

3) Da nun nach 1) die Mischung die nämliche Menge Silber enthält, wie die zu vermischenden Stücke zusammen, so ist:

$$13x + 10y + 6z = 11 (x + y + z).$$

Auflösung. $2x = y + 5z$.

Setzt man hier:

1. $y = 1$, so ist

$$2x = 5z + 1,$$

$$x = 2z + \frac{z+1}{2},$$

$$x = 2z + A, \text{ aber gemäß } \frac{z+1}{2} = A,$$

$$z = 2A - 1.$$

Hier kann $A = 1$ sein, dann ist $z = 1$, $x = 3$;
$A = 2$ „ „ „ $z = 3$, $x = 8$;
$A = 3$ „ „ „ $z = 5$, $x = 13$ u. s. w.

Anmerkung. Das erste von den berechneten Verhältnissen, nemlich $x : y : z = 3 : 1 : 1$ ist das, welches auch die gemeine Regel auffinden läßt; wenn wir nach dieser verfahren, so haben wir:

13	1	13	5
	11		11
10	2	6	2

d. h. für das 13 löthige Silber ist das Verhältniß $(1 + 5) = 6$, für das 10 löthige 2, für das 6 löthige ebenso, aber

$$6 : 2 : 2 = 3 : 1 : 1,$$

mithin wirklich dasselbe Verhältniß wie oben.

Es kann aber auch

2. $y = 2$ sein; dann ist

$$2x = 5z + 2,$$

$$x = 2z + 1 + \frac{z}{2},$$

$$x = 2z + 1 + A, \text{ und gemäß } \frac{z}{2} = A,$$

$$z = 2A.$$

Ist hier $A = 1$, so $z = 2$, $x = 6$ (offenbar wieder dasselbe Verhältniß, welches auch die gemeine Regel bestimmt),
" " $A = 2$, " $z = 4$, $x = 11$,
" " $A = 3$, " $z = 6$, $x = 16$ u. s. w.

Nun kann noch $y = 3, = 4, = 5 \ldots$ angenommen werden, und für jede dieser Annahmen ergeben sich wieder unendlich viele mögliche Werthe für x und für z, so daß wir sehen, daß das anzugebende Mischungsverhältniß keineswegs ein bestimmtes ist, wie es die Arithmetik lehrt, sondern ein durchaus unbestimmtes.

b) Ein Weinwirth hat von einer gewissen Weingattung dreierlei Sorten, im Preise von 2 fl. 12 kr., 1 fl. 45 kr. und 1 fl. 36 kr. Er soll von dieser Gattung 7 Eimer abgeben, aber der Besteller wünscht die Maß zu 1 fl. 48 kr. Wie viel muß er, wenn er redlich sein will, von jeder Sorte nehmen, um 7 Eimer zu dem gewünschten Preise zu mischen?

Ansatz. 1) Der Wein muß gemischt oder ungemischt das Gleiche kosten — das gibt die erste Grund-Gleichung. Die zweite aber erhält man, wenn man ausspricht, daß die einzelnen Mischungs-Quantitäten zusammen 7 Eimer betragen.

2) Nimmt er von der ersten Sorte x M., so kosten diese $2^1/_5$ x fl.,
" " " " zweiten " y M., " " " $1^3/_4$ y fl.,
" " " " dritten " z M., " " " $1^3/_5$ z fl.
zusammen $(2^1/_5 x + 1^3/_4 y + 1^3/_5 z)$ fl.;
aber die Mischung hält nun $(x + y + z)$ Maß à 1 fl. 48 kr., welche demnach einen Werth haben von $1^4/_5 (x + y + z)$ fl.

3) Es ist sonach

$$1.\quad 2\tfrac{1}{5}x + 1\tfrac{3}{4}y + 1\tfrac{3}{5}z = 1\tfrac{4}{5}(x + y + z),$$

$$2.\quad x + y + z = 420 \quad [7 \text{ Eimer} = 420 \text{ Maß}].$$

Auflösung. $44x + 35y + 32z = 36x + 36y + 36z.$

$$1.\quad 8x - y - 4z = 0;$$

$$2.\quad x + y + z = 420;$$

$$9x \quad - 3z = 420,$$

$$3x \quad - z = 140;$$

mithin $z = 3x - 140$; $y = 560 - 4x$,

womit denn die Unbekannten z und y in ganzen Zahlen ausgedrückt sind, während für x eben die verschiedenen möglichen Annahmen gemacht werden müssen. Die kleinste, die hier gemacht werden kann, ist $x = 47$, wobei $z = 141 - 140 = 1$, weil bei jeder noch kleinern z negativ würde. Nehmen wir aber, weil auch die begleitenden Zahlen 140 und 560 auf 0 ausgehen, für x nur Zehner, so sei

1) $x = 60$, so ist $z = 40$, $y = 320$,
2) $x = 80$, „ „ $z = 100$, $y = 240$,
3) $x = 100$, „ „ $z = 160$, $y = 160$,
4) $x = 120$, „ „ $z = 220$, $y = 80$.

$x = 140$ wäre schon nicht mehr möglich, weil sonst $y = 560 - 560 = 0$.

Anmerkung. Die Werthe unter 3) sind hier diejenigen, welche der Lösung dieser Aufgabe nach der gemeinen Regel entsprechen. Nach dieser hat man, die Werthe in Kreuzern ausgedrückt:

132	3	132	12
	108		108
105	24	96	24

mithin $x : y : z = 15 : 24 : 24 = 5 : 8 : 8$,

daher nach §. 91.:

$$(x + y + z) : (5 + 8 + 8) = x : 5,$$
$$y : 8,$$
$$z : 8,$$

oder $7 : 21 = x : 5$, woraus $x = {}^5/_3$ Ꝼ. $= 100$ M.,
$1 : 3 = y : 8$, „ $y = {}^8/_3$ Ꝼ. $= 160$ M.,
$1 : 3 = z : 8$, „ $z = {}^8/_3$ Ꝼ. $= 160$ M.,

Anmerkung. Die Lösung der gemeinen Mischungsregel gibt immerhin passende Mittelwerthe, allein sie ist, wie wir gesehen haben, an und für sich unvollständig, und kann, vom praktischen Standpunkte betrachtet, oft auch nicht genügend sein, wenn z. B. von einer oder der andern Sorte das nach dieser Regel geforderte Quantum gar nicht, wohl aber andere ebenfalls hinreichende Quantitäten vorräthig wären.

II. Aufgaben, welche auf höhere Gleichungen führen.

§. 110.

1) Zwei Reisende gehen zu ungleichen Zeiten von zwei Orten ab, welche 70 Meilen von einander entfernt sind, und sie begegnen sich, nachdem sie zusammen 13 Tage unterwegs gewesen waren. Wäre aber A so schnell gegangen als B, umgekehrt B so langsam als A, so hätten sie sich etwas früher begegnet, indem sie in diesem Falle in der gleichen Zeit zusammen 73 Meilen, A nemlich 48, B aber 25, zurückgelegt hätten. Wie viele Tage war Jeder auf der Reise, und wie viele Meilen machte Jeder des Tages?

Ansatz. 1) Die Grund-Gleichung ist nach Aufgabe (7) des §. 107. die folgende:

$$d = W_1 + W_2.$$

2) Diese Wege W_1 und W_2 formuliren sich als die Produkte aus den Zeiten in die Geschwindigkeiten (während je einer solchen Zeit). Die Zeiten erhalten wir einfach durch die Annahme, daß A bis zur Begegnung x, B mithin $(13 - x)$ Tage unterwegs gewesen sei, die Geschwindigkeiten aber aus folgenden Angaben:

a) B würde in $(13 - x)$ Tagen mit der Geschwindigkeit des A bloß 25 Meilen zurücklegen, woraus sich denn ergibt, daß A in einem Tage $\frac{25}{13 - x}$ Meilen macht;

b) hingegen würde A, wenn er so schnell reisen würde wie B, in x Tagen 48 Meilen zurücklegen, woraus also folgt, daß B in einem Tage $\frac{48}{x}$ Meilen macht.

Es ist demnach

$$W_1 = x \cdot \frac{25}{13 - x},$$

$$W_2 = (13 - x) \cdot \frac{48}{x}.$$

3) Diese Werthe und zugleich für d den Werth 70 in die Gleichung 1) substituirt, ist

$$70 = x \cdot \frac{25}{13 - x} + (13 - x) \cdot \frac{48}{x}.$$

Auflösung. Entweder $x = 8$, oder $x = 7\frac{1}{11}$.

Probe. 1) Nach dem ersten Werthe von x ist A 8 Tage unterwegs, B 5 Tage. Würde A die Geschwindigkeit des B haben, so würde er gemäß der Angabe in 8 Tagen 48 Meilen, aber B mit der Geschwindigkeit des A in 5 Tagen bloß 25 Meilen zurücklegen: daraus folgt, daß die Geschwindigkeit des B 6 Meilen per Tag ist, die des A bloß 5 Meilen.

Mithin ist der Weg des A in 8 Tagen oder $W_1 = 8 . 5 = 40$ M.,
" " " B " 5 " " $W_2 = 5 . 6 = 30$ M.,

daher $W_1 + W_2 = 70$ M. = d.

2) Gemäß dem zweiten Werthe von x ist A $7\,^1/_{11}$ Tage unterwegs, B $5\,^{10}/_{11}$. In $7\,^1/_{11}$ Tagen würde A mit der Geschwindigkeit des B 48 Meilen, aber B mit der Geschwindigkeit des A in $5\,^{10}/_{11}$ Tagen bloß 25 Meilen zurücklegen: mithin ist die Geschwindigkeit des $B = 48 : \frac{78}{11} = \frac{88}{13}$ M., die des $A = 25 : \frac{65}{11} = \frac{55}{13}$ M.

Daraus berechnet sich $W_1 = \frac{78}{11} \cdot \frac{55}{13} = 30$ M.,

$W_2 = \frac{65}{11} \cdot \frac{88}{13} = 40$ M.,

und abermals ist $W_1 + W_2 = 70$ M. = d.

---

2) Jemand läßt den Boden seines Zimmers malen, welches ein Rechteck bildet. Man kommt auf 1 kr. per Quadratfuß überein. Wäre nun das Zimmer um 4′ weniger lang gewesen, so hätte es 10 fl. gekostet, aber 11 fl. 12 kr., wenn es um 1′ weniger breit gewesen wäre. Was hat's nun wirklich gekostet?

Ansatz. 1) Wir haben hier offenbar zwei Gleichungen:

1. Der Preis für eine gewisse Anzahl Quadratfuß beträgt 10 fl., oder, weil 1 Quadratfuß auf 1 kr. zu stehen kommt, so ist diese Anzahl gleich der Anzahl der in 10 fl. enthaltenen Kreuzer, mithin = 600;
2. der Preis einer gewissen andern Anzahl Quadratfuß ist 11 fl. 12 kr., oder diese andere Anzahl selbst = 672.

2) Die Anzahl der Quadratfuß erhält man, wenn man die Länge mit der Breite multiplizirt: ist nun x die wirkliche Länge, y die wirkliche Breite des Zimmers, so ist

die im ersten Falle supponirte Länge $= x - 4$, die Breite $= y$,

„ „ zweiten „ „ „ „ $= x$ „ „ $= y - 1$,

mithin im ersten Falle die Anzahl der Quadratfuß $= (x - 4)\,y$,

im zweiten Falle $= x\,(y - 1)$.

3) Daher

$$1.\ (x - 4)\,y = 600,$$
$$2.\ x\,(y - 1) = 672.$$

Auflösung. $x = 28$, $y = 25$. *)

Probe. Das Zimmer ist 28′ lang, 25′ breit, hält also $28 \times 25\square' = 700\square'$ und kostet demnach 700 kr. = 11 fl 40 kr. Wäre es um 4′ weniger, also 24′ lang, so kosteten die $24 \times 25 = 600\square'$ nur 10 fl.; aber wenn es um 1′ weniger breit wäre, kosteten die $28 \times 24 = 672\square'$ doch noch 11 fl. 12 kr., also Alles gerade so, wie es die Angabe besagt.

---

3) Es wurde ein Kapital sammt dessen 6jährigen Zinsen mit $698\frac{1}{2}$ fl. zurückbezahlt. Wie groß war das Kapital für sich allein, wenn der Zinsfuß so viele Gulden vom Hundert betrug weniger Einen, als das Kapital Hunderte von Gulden?

Ansatz. 1) Bezeichnet man das Kapital mit K, die 6jährigen Zinsen mit Z, so ist offenbar

$$K + Z = 698\tfrac{1}{2}\text{ fl.}$$

2) Ist der Zinsfuß x fl. vom Hundert, so beträgt das Kapital $(x + 1)\,.\,100$ fl., die 6jährigen Zinsen aber berechnen sich nach der Proportion:

$$(x + 1)\ 100\,\text{K.} \times 6\,\text{J.} : 100\,\text{K.} \times 1\,\text{J.} = \text{ZZ.} : \text{xZ.},$$

woraus $Z = \dfrac{x\,(x + 1)\,100 \times 6}{100} = (x + 1)\,6x.$

---

*) Die quadratische Gleichung, welche man für x oder für y erhält, hat zwar natürlich auch wie jede andere zwei mögliche Werthe, da aber je einer hier negativ ist, eine negative Länge oder Breite aber keinen Sinn hat, so ist als wirklicher Werth nur je der positive zulässig.

3) Es ist also nach 1):

$$(x+1)\,100+(x+1)\,6x=698\,\frac{1}{2}\,.$$

Auflösung. $x=4\frac{1}{2}$.

Probe. Das Kapital ist sonach zu $4^1/_2$ % ausgeliehen und beträgt $5^1/_2 \times 100 = 550$ fl. Die 6jährigen Zinsen berechnen sich nach

$$550\times 6 : 100\times 1 = Z : \frac{9}{2}$$

auf $33\times\frac{9}{2}=148^1/_2$ fl.; diese zum Kapital geschlagen bringen dasselbe in der That auf die Summe von $698^1/_2$ fl.

---

4) Ein oblonger Saal, welcher $99000^{c'}$ hält, hat folgende Verhältnisse seiner Dimensionen: die Breite ist um 6' größer als die doppelte Höhe, die Länge aber verhält sich zur Breite wie 9 : 5; welches sind die Dimensionen des Saales?

Ansatz. 1) Der Kubikinhalt des Saales beträgt $99000^{c'}$; das gibt die Grundgleichung.

2) Den Kubikinhalt erhält man, wenn man Länge, Breite und Höhe miteinander multiplizirt. Bezeichnen wir die Höhe mit x, so ist die Breite $=2x+6$, und gemäß $L:(2x+6)=9:5$, die Länge $=\frac{9}{5}.(2x+6)$, daher der K. J. $=x.(2x+6).\ \frac{9}{5}.(2x+6)$.

3) Mithin ist:

$$\frac{9}{5}x\,(2x+6)^2=99000.$$

Auflösung.
$$x\,(2x+6)^2=55000,$$
$$4x^3+24x^2+36x=55000,$$
$$x^3+6x^2+9x=13750.$$

Setzt man, um die Kardansregel anzuwenden, $x=y-2$, so erhält man die neue Gleichung:

$$y^3=3y+13752.$$

Es ist nun $\frac{A}{3}=1$, $\frac{B}{2}=6876$, $\left(\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{1}\right)^3=47279375$

$= 625 \times 75647$, und daher v positiv; weil ferner 75647 weder durch 3, noch durch 5 oder 7 theilbar, kann v ebenfalls diese Faktoren nicht enthalten. Setzen wir also

$$1.\ y = (u + \sqrt[2]{v}) + (u - \sqrt[2]{v}),$$
$$2.\ u^2 = 1 + v,$$

wobei $3.\ u^3 + 3uv = 6876,$

so könnte v nacheinander $= 3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99, 120, 143 \ldots.$ sein, weil $3 + 1 = 4$, $8 + 1 = 9$ u. s. w., allein von allen diesen Werthen paßt nach dem Obigen nur $v = 143$, wornach $u^2 = 144$, und $u = 12$. Versuchen wir, ob diese Werthe auch die Gleichung 3. wahr machen, so finden wir in der That:

$$1728 + 36 \,.\, 143 = 1728 + 5148 = 6876.$$

Es ist daher $y = 2u = 24$,
wornach $x = y - 2 = 22$.

Probe. Es beträgt sonach die Höhe des Saales 22′, daher die Breite $2 \,.\, 22 + 6 = 50'$, und die Länge 90′; aber $90' \,.\, 50' \,.\, 22' = 99000^{c'}$.

---

5) Der Radius einer Kugel ist um 3′ kleiner als der Durchmesser einer zweiten, aber der Inhalt der erstern um $255, 516^{c'}$ ... größer: welches sind die Radien dieser beiden Kugeln?

Ansatz. 1) Bezeichnen wir den Inhalt der ersten Kugel mit K_1, den der zweiten mit K_2, so ist

$$K_1 - K_2 = 255, 516 \ldots$$

2) Nehmen wir den Radius der zweiten Kugel $= x$ an, so ist der der ersten $= 2x - 3$, aber

$$K_1 = \frac{4}{3} \,.\, (2x - 3)^3 \,.\, \pi, \ *)$$

$$K_2 = \frac{4}{3} \,.\, x^3 \,.\, \pi.$$

3) Daher ist

$$\frac{4}{3} \,.\, (2x - 3)^3 \,\pi - \frac{4}{3}\, x^3 \pi = 255, 516 \ldots, \ .$$

---

*) Gemäß der geometrischen Formel: $K = \frac{4r^3\pi}{3}$, wobei bekanntlich $\pi = 3, 14159 \ldots$

Auflösung. $(2x-3)^3 - x^3 = 61$,

$$7x^3 - 36x^2 + 54x - 88 = 0.$$

Die Faktoren von 88, deren einer eine Wurzel der Gleichung sein muß, wenn sie überhaupt eine rationale und ganze Wurzel hat, sind: 2, 4, 8, 11. Versuchen wir's etwa mit 4, so ist in der That:

$$7 \cdot 64 - 36 \cdot 16 + 54 \cdot 4 - 88 = 448 - 576 + 216 - 88 =$$
$$664 - 664 = 0;$$

mithin ist $x = 4$ (die beiden andern Wurzeln sind imaginär).

Probe. Der Radius der kleinern Kugel beträgt 4′, also der Durchmesser 8′, und daher der Radius der größern Kugel $8' - 3' = 5'$; es ist aber

$$\frac{4}{3} \cdot 125 \cdot \pi - \frac{4}{3} \cdot 64 \cdot \pi = \frac{4}{3} \pi \cdot 61 = 255,\ 516.$$

Anhang.

Von den Progressionen.

§. 111.

Den Uebergang von der Elementar- zur höhern Mathematik bilden die sogenannten algebraischen Reihen oder Progressionen. Unter einer solchen versteht man eine Reihe in bestimmter Ordnung aufeinander folgender Zahlen; ihr allgemeiner Ausdruck ist daher:

$$t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots\ldots t_n, t_{n+1} \ldots\ldots,$$

wo die Zeiger $1, 2, 3 \ldots\ldots, n+1 \ldots\ldots$ den Zahlen die ihnen, gemäß der sie bestimmenden Ordnung, in der Reihe zukommenden Stellen anweisen, weßwegen dieselben auch als bestimmt geordnete Theile eines Ganzen Glieder heißen.

Hingegen würde

$$a, b, c, d, \ldots\ldots m, p, x \ldots\ldots$$

eine Reihe willkürlich aufeinander folgender Zahlen, also keineswegs eine Progression darstellen.

Die spezielle Entwicklung der obigen allgemeinen Reihe hängt nun offenbar bloß von dem algebraischen Gesetze ab, durch welches die Ordnung der aufeinander folgenden Glieder bestimmt wird. Solcher Gesetze sind mancherlei denkbar und daher viele Arten von algebraischen Reihen möglich, aber alle Reihen lassen sich, insoferne sie einem einzigen Gesetze und nicht einer Combination von Gesetzen folgen, unter dem nachstehenden allgemeinen Gesetze begreifen, in welchem Zahlenvergleichung und Zahlenverbindung

dergestalt als zusammen und zugleich wirkend auftreten, daß man dasselbe in dieser Vereinigung der beiden Haupttheile der Algebra mit Recht als die Spitze und den Schlußstein derselben bezeichnen kann.

Dieses Gesetz heißt:

„Eine algebraische Reihe oder eine Progression entsteht, wenn auf dieselbe Weise, wie eine gewisse Anzahl gegebener Zahlen durch irgend eine Zahlenverbindung gegenseitig auseinander entwickelt sind, auch die folgenden Zahlen aus den vorhergehenden entwickelt werden."

Die Zahlenverbindungen, auf welche man sich hiebei beschränkt, sind die Addition, welche ja auch die Subtraktion, und die Multiplikation, welche auch die Division in sich begreift, während die höhern Rechnungsarten, wenn man auch sie hier in Anwendung bringen wollte, jedenfalls auf zu große Schwierigkeiten führen würden. Demgemäß haben wir auch bloß additive, d. h. durch Addition, und multiplikative, d. h. durch Multiplikation entstandene Reihen zu unterscheiden.

Einen weiteren, wichtigen Unterschied aber begründet die Anzahl der gegebenen Zahlen, aus welchen die Reihe entwickelt werden soll. Offenbar können deren nicht weniger als zwei sein, wohl aber beliebig mehrere; wir unterscheiden hienach:

1) Reihen der ersten Ordnung, welche aus zwei,
2) „ „ zweiten „ „ „ drei,
3) „ „ dritten „ „ „ vier

gegebenen Zahlen entwickelt werden, u. s. w.

A. Additive Reihen.

ad 1) Sind zwei Zahlen, etwa 1, 4 .... gegeben, und soll hieraus eine additive Reihe entwickelt werden, so ist offenbar 4 aus 1 durch Addition von 3 entstanden, mithin muß auch das nächste Glied aus 4 durch Addition von 3 gebildet werden und wird daher $4 + 3 = 7$, das darauf folgende $7 + 3 = 10$ u. s. w. sein, so daß wir folgende Reihe der ersten Ordnung haben:

$$1,\ \underset{3}{4},\ \underset{3}{7},\ \underset{3}{10},\ \underset{3}{13},\ \underset{3}{16} \ldots,$$

in welcher die Differenz zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern für die ganze Reihe dieselbe, also eine konstante Größe ($= 3$) ist.

ad 2) Sind drei Zahlen, etwa 1, 4, 10 .... gegeben, welche nicht bereits einer Reihe der ersten Ordnung angehören, wie dieß mit 1, 4, 7 .... der Fall sein würde, so findet sich, daß diese Zahlen keineswegs mit gleichen, sondern mit ungleichen Differenzen und zwar in unserm Beispiele mit steigenden, 3, 6 .... fortschreiten. Mithin sind auch die folgenden Glieder nicht mit gleichen, sondern ebenfalls mit ungleichen und zwar in gleicher Weise wie bisher steigenden Differenzen, als 3, 6, 9, 12 .... zu bilden; das nächste Glied ist sohin $10 + 9 = 19$, das darauf folgende $19 + 12 = 31$ u. s. w., so daß wir folgende Reihe der zweiten Ordnung erhalten:

1, 4, 10, 19, 31, 46, 64 ....;
3 6 9 12 15 18
3 3 3 3 3

in welcher die Differenzen zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern oder die sogenannten ersten Differenzen selbst wieder eine Reihe der ersten Ordnung bilden, und erst die zweiten Differenzen, d. h. die zwischen je zwei aufeinander folgenden ersten, durchweg gleich oder konstant sind.

ad 3) Wenn vier Zahlen, etwa 1, 4, 10, 20 .... gegeben sind, welche, wie dieß hier der Fall, nicht bereits einer der beiden vorausgehenden Ordnungen angehören, so findet sich, daß weder sie selbst mit gleichen ersten Differenzen fortschreiten, noch diese letztern, 3, 6, 10 mit gleichen zweiten, sondern diese zweiten Differenzen, 3, 4, sind selbst wieder ungleich und zwar in unserm Falle steigend. Da nun die folgenden Glieder in gleicher Weise gebildet sein sollen, wie die vorhergehenden, so dürfen auch für sie weder die ersten noch die zweiten Differenzen einander gleich sein, wohl aber müssen die letztern fort und fort um ein Gleiches, wie die gegebenen, 3 und 4, steigen, so daß wir folgende zweite Differenzen erhalten: 3, 4, 5, 6, 7 .... . Hieraus aber berechnen sich die nächsten ersten Differenzen mit: $10 + 5 = 15$, $15 + 6 = 21$, $21 + 7 = 28$ u. s. w., so daß die gesuchten Glieder der Reihe selbst nun werden: $20 + 15 = 35$, $35 + 21 = 56$, $56 + 28 = 84$ u. s. w.

Unsere Reihe der dritten Ordnung ist daher:

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120 ....
3 6 10 15 21 28 36
3 4 5 6 7 8
1 1 1 1 1

In dieser Reihe der dritten Ordnung bilden die ersten Differenzen offenbar selbst wieder eine Reihe der zweiten Ordnung, die zweiten eine der ersten, und erst die dritten Differenzen sind durchweg gleich oder konstant.

Auf dieselbe Weise könnten wir noch weiter aus fünf gegebenen Zahlen eine Reihe der vierten Ordnung, aus sechs eine der fünften u. s. w. bilden; da jedoch damit nichts Neues gewonnen wird, so beschränken wir uns darauf, beispielsweise noch einige interessante Reihen hervorzuheben.

a) Wir haben oben aus 1, 4, 10, 20 die Reihe 1, 4, 10, 20, 35, 56.... entwickelt, die wir aus §. 53 als die Reihe derjenigen Zahlen kennen, welche für nicht symmetrische Aggregate die Anzahl der Glieder des Kubus angeben, je nachdem die erste Potenz aus 1, 2, 3, 4.... Gliedern besteht. Ebenso erhalten wir aus 1, 3, 6 die Reihe 1, 3, 6, 10, 15, 21 der zweiten Ordnung, welche demselben §. zufolge für die Quadrate der nicht symmetrischen Aggregate dieselbe Bedeutung hat wie obige Reihe der dritten Ordnung für die Kubusse.

b) Entwickelt man aus 1, 4, 9 d. i. aus den Quadraten der Zahlen 1, 2, 3, auf die bisherige Weise eine Reihe der zweiten Ordnung, so erhält man, da die ersten Differenzen 3, 5, 7, 9, 11.... sind, als viertes Glied $9+7=16$, als fünftes $16+9=25$, als sechstes $25+11=36$ u. s. w., so daß wir die Reihe haben:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49....,

deren Glieder, wie man sieht, nichts anders als die Quadrate der natürlichen Zahlen sind.

In gleicher Weise erhält man die Kubusse der in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen, wenn man aus vier derselben, etwa aus 1, 8, 27, 64 eine Reihe der dritten Ordnung entwickelt. Als erste Differenzen haben wir nemlich hier zunächst 7, 19, 37, woraus die zweiten Differenzen 12, 18 hervorgehen, die sich mit 24, 30, 36.... leicht fortsetzen lassen und dann folgende erste Differenzen geben: 7, 19, 37, 61, 91, 127.... Daher wird das fünfte Glied der gesuchten Reihe $= 64+61=125=5^3$, das sechste $= 125+91=216=6^3$, das siebente $= 216+127=$ $=343=7^3$ u. s. w.

Man sieht hieraus, daß auch diese Reihen nicht, wie man vermuthen möchte, aus dem speziellen Gesetze der Aufeinanderfolge der

Quadrate oder Kubusse der natürlichen Zahlen, sondern wie alle übrigen additiven Reihen aus unserm allgemeinen Gesetze von selbst hervorgehen.

B) Multiplikative Reihen.

Die multiplikativen Reihen entstehen durch Multiplikation in derselben Weise wie die additiven durch Addition, und zwar ebenfalls Reihen der ersten, der zweiten, der dritten ꝛc. Ordnung, je nachdem je zwei oder drei oder vier ꝛc. aufeinander folgende Glieder durch Multiplikation ebenso aus einander entwickelt werden sollen, wie es zwei oder drei oder vier ꝛc. gegebene wirklich sind. So erhalten wir:

1) aus 1, 3.... die Reihe der ersten Ordnung:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243\ldots,$$
$$3\quad 3\quad 3\quad 3\quad 3$$

in welcher bereits die ersten Quotienten durchweg dieselben oder konstant (=3) sind;

2) aus 1, 3, 6... die Reihe der zweiten Ordnung:

$$1,\ 3,\ 6,\ 8,\ \frac{64}{9},\ \frac{1024}{243}\ldots,$$
$$3\quad 2\quad \frac{4}{3}\quad \frac{8}{9}\quad \frac{16}{27}$$
$$\frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}\quad \frac{2}{3}$$

in welcher erst die zweiten Quotienten konstant $\left(=\frac{2}{3}\right)$ sind;

3) aus 1, 4, 8, 12 .... die Reihe der dritten Ordnung:

$$1,\ 4,\ 8,\ 12,\ \frac{81}{4},\ \frac{59049}{1024}\ldots,$$
$$4\quad 2\quad \frac{3}{2}\quad \frac{27}{16}\quad \frac{729}{256}$$
$$\frac{1}{2}\quad \frac{3}{4}\quad \frac{9}{8}\quad \frac{27}{16}$$
$$\frac{3}{2}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{3}{2}$$

in welcher erst die dritten Quotienten konstant $\left(=\frac{3}{2}\right)$ sind.

---

§. 112.

Nachdem wir im vorhergehenden §. das Wesen der algebraischen Reihe dargelegt und in einigen Beispielen anschaulich gemacht haben, hätte nun die weitere Aufgabe zu folgen, die hieraus fließenden Gesetze für die einzelnen Reihen nacheinander zu entwickeln: allein so interessant die Verfolgung dieser Aufgabe auch wäre, so wollen wir uns hier doch auf das beschränken, was hievon gewöhnlich in den Kreis der Elementar-Mathematik gezogen wird, nemlich auf die Gesetze der Reihen der ersten Ordnung.

Das Hauptgesetz dieser Reihen, gemäß welchen „je **zwei** aufeinander folgende Glieder durchweg auf gleiche Art auseinander formirt werden," findet, je nachdem diese Formation durch Addition oder durch Multiplikation geschieht, einen verschiedenen algebraischen Ausdruck, nemlich:

1) Bezeichnet d die Zahl, welche je zu einem vorhergehenden Gliede addirt wird, um das zunächst folgende zu bilden, so ist:

$$t_2 = t_1 + d,\ t_3 = t_2 + d,\ t_7 = t_6 + d,\ t_n = t_{n-1} + d,$$

oder $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 \ldots = t_7 - t_6 \ldots = t_n - t_{n-1} = d$, d. h.

„In den additiven Reihen der ersten Ordnung geben je zwei aufeinander folgende Glieder durchweg dieselbe Differenz."

Man nennt solche Reihen, weil offenbar dem eben Gesagten zufolge je zwei Paare aufeinander folgender Glieder derselben eine arithmetische Proportion bilden, arithmetische Progressionen.

Ist jene Differenz d, welche man erhält, wenn man von irgend einem Gliede das nächst vorhergehende subtrahirt, positiv, so werden gemäß $t_2 = t_1 + d$, $t_3 = t_2 + d$ u. s. w. die folgenden Glieder immer größer, wenn aber d negativ, gemäß $t_2 = t_1 - d$, $t_3 = t_2 - d$ u. s. w. immer kleiner: man nennt deßwegen die arithmetische Progression im erstern Falle eine steigende, im letztern eine fallende.

2) Ist q die Zahl, mit welcher ein vorhergehendes Glied multiplizirt wird, um das nächstfolgende zu bilden, so haben wir für die multiplikativen Reihen folgenden Ausdruck des Hauptgesetzes:

$t_2 = t_1 \times q$, $t_3 = t_2 \times q$, $t_5 = t_4 \times q$, $t_n = t_{n-1} \times q$,
oder $t_2 : t_1 = t_3 : t_2 \ldots = t_5 : t_4 \ldots = t_n : t_{n-1} = q$, d. h.

„In den multiplikativen Reihen der ersten Ordnung geben je zwei aufeinander folgende Glieder durchweg denselben Quotienten."

Weil demzufolge zwischen je zwei Paaren aufeinander folgender Glieder eine geometrische Proportion besteht, so heißt man solche Reihen auch geometrische Progressionen.

Ist jener Quotient q, welchen man erhält, wenn man irgend ein Glied durch das nächst vorhergehende dividirt, größer als 1, so werden gemäß $t_2 = t_1 \times q$, $t_3 = t_2 \times q$ die folgenden Glieder immer größer; ist aber q kleiner als 1, so immer kleiner: man nennt deßhalb die geometrische Progression im erstern Falle eine steigende, im letztern eine fallende.

Arithmetische Progression.

§. 113.

I. Ungeschlossene Reihe.

Wir haben in §. 109. gesehen, daß eine Reihe der ersten Ordnung, d. h. eine arithmetische Progression aus zwei aufeinander folgenden Gliedern vollständig sich entwickeln lasse, oder mit andern Worten, daß eine arithmetische Progression bekannt sei, wenn von ihren Gliedern zwei aufeinander folgende gegeben sind. Man nimmt diese zwei gegebenen Glieder in der Regel als das erste und zweite Glied der Reihe an, insoferne man nemlich diese letztere nur vorwärts und nicht zugleich auch rückwärts (wobei dann die gegebenen zwei Glieder natürlich nicht mehr die beiden ersten wären) entwickelt; da nun aber, gemäß $t_2 = t_1 + d$, das zweite Glied immer bekannt ist, wenn außer dem ersten Gliede auch noch die Differenz gegeben ist, so kann man obigen Satz auch so aussprechen:

Eine arithmetische Progression ist bekannt, wenn ihr erstes Glied und ihre Differenz gegeben sind.

In der That lassen sich damit alle Glieder nach einander herstellen; bezeichnen wir hiezu das erste Glied t_1, wie das gewöhnlich geschieht, mit a, so ist:

$$t_2 = a + d,$$
$$t_3 = t_2 + d = (a + d) + d = a + 2d,$$
$$t_4 = t_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d \text{ u. s. w.},$$

so daß sich die Norm der Bildung eines jeden Gliedes unschwer erkennen läßt: jedes Glied ist nemlich eine Summe aus dem ersten Gliede a und aus einem Produkte, in welchem die Differenz d den einen, ein Coëfficient aber, der um 1 kleiner ist, als der Zeiger des Gliedes, den andern Faktor bildet. Hienach ist z. B.

$$t_{10} = a + 9d,$$
$$t_{32} = a + 31d,$$
$$t_n = a + (n - 1)d.$$

Der allgemeine Ausdruck einer arithmetischen Progression, dargestellt durch die beiden gegebenen Größen a und d, ist daher:

$$a, (a+d), (a+2d), (a+3d) \ldots [a+(n-1)d], [a+nd], [a+(n+1)d], \ldots$$

Die letzte Gleichung:

$$t_n = a + (n - 1)d$$

heißt, weil n jeden beliebigen Werth annehmen und so t_n jedes beliebige Glied vorstellen kann, die Gleichung des allgemeinen Gliedes.

Es ist nicht gerade nothwendig, daß es das erste und zweite Glied der Progression, oder, was eben so viel, das erste Glied und die Differenz sei, was gegeben ist, die Progression ist bekannt, wenn überhaupt zwei ihrer Glieder gegeben sind.*) Ist z. B. das 5te Glied einer arithmetischen Progression 19, das 11te 43, so hat man die Gleichungen:

$$t_5 = a + 4d = 19,$$
$$t_{11} = a + 10d = 43,$$

woraus sich $a = 3$ und $d = 4$ berechnet, so daß die Reihe wird:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43 ....,

in welcher Reihe in der That das 5te Glied 19, das 11te aber 43 ist.

---

*) Man darf diesen Satz nicht so verstehen, als ob z. B. die Progression bekannt wäre, von der gesagt ist, daß 19 und 43 zwei ihrer Glieder sind: Glieder der Progression sind diese Zahlen eben nur dann, wenn sie bestimmte Stellen in derselben einnehmen, und als Glieder sind sie daher auch nur dann gegeben, wenn gesagt ist, welche Stellen sie in der Reihe einnehmen.

II. Geschlossene Reihe.

Die Reihe, wie wir sie bisher betrachtet, geht in's Endlose fort, ja sie könnte sogar auch rückwärts ebenso in's Endlose fortgesetzt gedacht werden, so daß von einem wahrhaft ersten und ohnehin von einem letzten Gliede hiebei keine Rede ist. Wenn wir aber nur einen bestimmten Theil einer solchen Reihe in's Auge fassen, von einem bestimmten Gliede, nun dem wahrhaft ersten, anfangend, und mit einem bestimmten, dem letzten endigend, so haben wir eine geschlossene arithmetische Progression.

Eine solche ist offenbar durch die zwei bisher gegebenen Stücke a und d keineswegs vollständig bekannt, sondern man muß, um die bestimmte geschlossene Reihe (kein Glied mehr, keines weniger) entwickeln zu können, auch noch wissen,

entweder wie viele Glieder im Ganzen zu entwickeln sind,
oder mit welchem als dem letzten Gliede die Entwicklung beschlossen werden müsse:

in jedem Falle also muß außer a und d noch ein Drittes, nemlich entweder die Anzahl der Glieder (n), oder das letzte Glied (z), gegeben sein.

Für dieses letzte Glied z erhält man, wenn n (wie bei der geschlossenen Reihe immer) die bestimmte Bedeutung der Anzahl der Glieder hat, vermöge $t_n = z$, die Gleichung:

$$z = a + (n - 1)\,d \quad (I).$$

Da aus dieser Gleichung, wenn von den vier darin enthaltenen (unbestimmten) Zahlen drei gegeben sind, die vierte (unbekannte) sich jedesmal berechnen läßt, so folgt, daß die geschlossene arithmetische Progression immer hergestellt werden könne, wenn von den vier Stücken:

„erstes Glied (a), Differenz (d), Anzahl der Glieder (n), letztes Glied (z)"

irgend drei gegeben sind. Z. B.

Eine arithmetische Progression, deren erstes Glied 7, letztes 39 ist, besteht aus 9 Gliedern; wie heißt sie?

Auflösung. Substituiren wir die gegebenen Zahlen für a, z und n in die Gleichung des letzten Gliedes, so haben wir:

$$39 = 7 + (9 - 1)\,d,$$

woraus $d = 4$. Mithin ist die Reihe:

7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39.

Bei den geschlossenen arithmetischen Progressionen tritt zu den bisherigen vier noch eine fünfte mögliche Größe, die Summe der Glieder, von welcher natürlich bei einer ungeschlossenen keine Rede sein kann. Die Herstellung derselben ist durch einfache Summation der Glieder bei der allgemeinen Reihe nicht sofort möglich, wird es aber dadurch, daß man die Summe erst direkt, vom ersten Gliede zum letzten, und dann umgekehrt, vom letzten zum ersten Gliede ansetzt, und nun den Werth der doppelten Summe sucht, indem man diese beiden Reihen Glied für Glied addirt, wie folgt:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n-3)d] + [a + (n-2)d] + [a + (n-1)d],$$
$$S = [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + [a + (n-3)d] + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a;$$

$$2S = [2a + (n-1d] + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1d] + \ldots + [2a + (n-1)d] +$$
$$+ [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d].$$

Dieser Ausdruck enthält offenbar den Summanden $[2a + (n-1)d]$ so oft, als die Reihe Glieder enthält, also n mal; mithin ist

$$2S = [2a + (n-1)\,d] \times n,$$
$$S = [2a + (n-1)\,d] \times \frac{n}{2}.$$

Substituirt man innerhalb der Klammer, nachdem 2a in $a + a$ aufgelöst ist, z statt $a + (n-1)\,d$ (gemäß I), so erhält man:

$$S = (a + z)\frac{n}{2} \quad \text{(II)}.$$

Wenn man nun die beiden Gleichungen:

$$\text{I.}\quad z = a + (n-1)\,d,$$
$$\text{II.}\quad S = (a + z)\frac{n}{2},$$

zusammensetzt, so brauchen von den fünf darin enthaltenen Größen nur drei gegeben zu sein, um die übrigen zwei daraus berechnen zu können, und so alle Größen der geschlossenen arithmetischen Progression, damit aber auch sie selbst vollständig zu kennen.

§. 114.

III. Rechnerisches.

Bei der Zusammensetzung der Gleichungen I. und II. sind 10 verschiedene Fälle möglich; es können nemlich unbekannt sein:

1) a und d; 5) d und n, 8) n und z, 10) z und S,
2) a „ n, 6) d „ z, 9) n „ S,
3) a „ z, 7) d „ S,
4) a „ S,

so daß sich, weil je zwei Unbekannte vorhanden sind, im Ganzen 20 verschiedene Formeln hiefür ergeben. Jedoch wäre es sehr überflüßig, diese 20 Formeln auch wirklich allgemein zu entwickeln, indem ja obige zwei Gleichungen in jedem Falle hinreichen, die jeweiligen zwei Unbekannten (auch ohne Formeln) nach den betreffenden Regeln über die Auflösung der Gleichungen zu bestimmen. Nur das mag bemerkt werden, daß in den Fällen, wo n und a, oder n und z unbekannt sind, immer quadratische Gleichungen und daher, weil hieraus je zwei Werthe für die Unbekannten folgen, zweierlei Progressionen sich ergeben. Dabei sind hinsichtlich der Werthe von n zwei Vorkommnisse besonders zu erwähnen, nemlich:

1) neben dem in ganzen Zahlen ausgedrückten Werthe ergibt sich in der Regel auch ein Bruch-Werth von n;
2) in gewissen Fällen außer einem positiven auch ein negativer Werth.

Da nun aber n eigentlich bloß eine ganze und positive Zahl sein kann, so fragt sich's, wie denn solche Bruch- oder negative Werthe zu deuten sind. Die Beantwortung dieser Frage versuchen wir in den folgenden Beispielen.

1) In einer arithmetischen Progression, deren Differenz $=3$, ist das letzte Glied 35, die Summe der Glieder 220; wie heißt dieselbe?

Auflösung. Wir haben hier die Gleichungen:

$$35 = a + (n-1)\,3,$$

$$220 = (a + 35)\,\frac{n}{2}.$$

Gereinigt und zur Summation vorbereitet verwandeln sie sich in:

$$38n = an + 3n^2,$$
$$440 = an + 35n,$$
$$(-) \quad (-) \quad (-)$$

woraus $38n - 440 = 3n^2 - 35n$,

oder $3n^2 - 73n = -440$.

Wenden wir zur Auflösung dieser quadratischen Gleichung die Complirungs-Methode an, so haben wir:

$$9n^2 - 219n + \left(\frac{73}{2}\right)^2 = \left(\frac{73}{2}\right)^2 - 1320 = \frac{49}{4},$$

woraus $3n - \frac{73}{2} = \pm\frac{7}{2}$.

Es ist daher entweder $n = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$,

oder $n = \frac{33}{3} = 11$.

Dem ersten Werthe von n entspricht, gemäß $35 = a + \frac{37}{3}.3$, $a = -2$, dem zweiten, gemäß $35 = a + 10.3$, $a = 5$; die beiden möglichen Progressionen sind sonach:

1) — 2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37...,
2) 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35.

In der letztern Progression ist das 11te oder letzte Glied ohne Weiteres = 35, wie es gegeben ist; in der erstern aber findet sich unmittelbar kein letztes Glied 35. Jedoch wenn man von 34 auf 37 selbst wieder in einer arithmetischen Progression von drei Gliedern fortschreitet, nemlich mit

34, 35, 36, 37,

so ergibt sich in der That 35 als das $13^1/_3$te oder letzte Glied der Progression, indem man vom 13ten Gliede (34) zum 14ten (37) gerade auf $^1/_3$ des Abstandes zwischen beiden fortzuschreiten hat, um auf 35 zu kommen. Hienach läßt sich also die Deutung, die wir hier dem Bruchwerthe von n gegeben haben, recht wohl mit zwei der gegebenen Größen, nemlich mit d = 3 und z = 35 vereinbaren. Sie kann aber doch erst dann als ganz richtig angesehen werden, wenn sie mit allen gegebenen Größen, also auch mit der dritten, S = 220, im Einklange steht. Das scheint nun, wenn man die Glieder der Reihe „— 2, 1,.... 34, 35" einfach summirt, auf den ersten Blick nicht der Fall zu sein, indem man bis 34 bereits 208 und mit Zurechnung von 35 die Zahl 243 zur

Summe erhält, während dieselbe = 220 sein sollte; allein sowohl die Summen-Formel gibt nach

$$S = (-2 + 35) \cdot \frac{40}{6} = 33 \cdot \frac{20}{3} \cdot = 220,$$

wirklich 220, also die rechte Summe, als auch die einfache Summation führt auf dasselbe Resultat, wenn wir berücksichtigen, daß wir zu den 13 ersten Gliedern nur $^1/_3$ des folgenden Gliedes, nicht ein ganzes Glied zu nehmen haben. In der That, wenn wir zur Summe der ersten 13 Glieder noch den dritten Theil des 14ten Gliedes addiren, so erhalten wir $208 + \frac{37}{3} = 208 + 12^*) = 220$, also abermals die gegebene Summe.

---

2) Wie heißt die arithmetische Progression, deren erstes Glied = — 8, Differenz = 5, und Summe der Glieder = 76 ist?

Auflösung. Wir haben hier die Gleichung:

$$76 = [-2 \cdot 8 + (n-1)\,5]\,\frac{n}{2},$$

woraus $5n^2 - 21n = 152$,

und $5n - \frac{21}{2} = \pm \frac{59}{2}$;

daher entweder $n = \frac{40}{5} = 8$,

oder $n = -\frac{19}{5} = -3\frac{4}{5}$.

Im ersten Falle heißt die Reihe:

— 8, — 3, 2, 7, 12, 17, 22, 27;

im zweiten Falle aber können wir die Gleichung: „$n = -3\frac{4}{5}$“ wohl nicht anders deuten, als daß das fragliche letzte Glied das $3\frac{4}{5}$te vor dem ersten Gliede (— 8) sei**); das gibt die Reihe (von rechts nach links zu lesen):

— 27, — 23, — 18, — 13, — 8,

in welcher — 13 das — 1te, — 18 das — 2te, aber — 27 das

---

*) Der Bruch $\frac{1}{3}$ kann hier offenbar nicht berücksichtigt werden.

**) Wäre das letzte Glied gegeben, und n negativ, so hätten wir in ähnlicher Weise dieß so zu deuten, daß das gegebene letzte Glied nicht das letzte sei, sondern daß ihm noch n Glieder zu folgen haben, wie wir eben aussprachen, daß das gegebene erste Glied nicht das erste ist, sondern daß ihm $3\frac{4}{5}$ Glieder vorgehen.

$-3\frac{4}{5}$te oder letzte Glied ist. In der That ist die Summe dieser negativ, d. h. subtraktiv zu nehmenden Glieder sowohl nach der Formel, als durch einfache Summation, freilich mit Berücksichtigung des oben sub 1) Gesagten, $= 76$; denn

es ist sowohl $S = (-13 + -27) \times -\frac{19}{10} = -40 . -\frac{19}{10} = 76,$

als auch S *) $= -\left[(-13) + (-18) + (-23) + (-28 . \frac{4}{5})\right]$

$= -[(-54) + (-22)] = -(-76) = 76.$

Endlich mag folgendes dritte Beispiel noch vollends die Richtigkeit unserer Auffassung der negativen und Bruchwerthe von n außer allen Zweifel setzen:

3) Das erste Glied einer arithmetischen Progression ist 37, die Differenz 5, die Summe der Glieder -98; wie heißt die Reihe?

Auflösung. Die Gleichung:

$$-98 = [2 . 37 + (n-1)5]\frac{n}{2}$$

gibt die quadratische Gleichung:

$$5n^2 + 69n = -196,$$

woraus $5n + \frac{69}{2} = \pm\frac{29}{2}.$

Es ist nun entweder $n = -\frac{20}{5} = -4,$

oder $n = -\frac{49}{5} = -9\frac{4}{5}.$

Im ersten Falle haben wir (von rechts nach links) folgende Reihe anzusetzen:

17, 22, 27, 32, 37,

in welcher 32 das $-$ 1te, 27 das $-$ 2te, 17 das $-$ 4te oder in unserm Falle letzte Glied vorstellt. Wirklich ist die Summe, die wir negativ nehmen müssen, weil unsere 4 Glieder nicht zu setzen, sondern hinweg zu nehmen sind, $= -98$, nemlich

$$S = -(32 + 27 + 22 + 17) = -98.$$

Im zweiten Falle heißt die Reihe, ebenfalls von rechts nach links gelesen, also:

---

*) Das Zeichen (—) bei der Anzahl der Glieder sagt, daß so viele Glieder nicht zu setzen, sondern umgekehrt hinweg zu nehmen sind.

(— 12), — 8, — 3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37,

wo —. 12 nun das — $9\frac{4}{5}$te Glied, und gemäß

$$S = (-12 + 32) \cdot -\frac{49}{10} = 20 \cdot -\frac{49}{10} = -98,$$

die Summe in der That wieder = — 98 ist.

Anm. Bezeichnen wir von den beiden Werthen, welche in den angeführten Fällen die Anzahl der Glieder ausdrücken, den einen mit n, den andern mit n', ebenso das erste und letzte Glied in der dem Werthe n entsprechenden Progression mit a und z, in der dem Werthe n' entsprechenden mit a' und z', so ist immer

$$\text{sowohl } n' = \frac{a' + z}{d},$$

$$\text{als auch } n = \frac{a' + z'}{d},$$

durch welche Formeln jedoch bloß die Zahlen selbst, ohne Rücksicht auf ihre Zeichen, bestimmt werden, während diese Zeichen von der Art und Größe der drei gegebenen Zahlen abhängen. *)

Die Bestätigung dieser beiden Gleichungen können wir sowohl durch unsere drei Beispiele verfolgen, wo

$$1)\ \text{sowohl } n' = \frac{5 + 35}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3},$$

$$\text{als auch } n = \frac{-2 + 35}{3} = \frac{33}{3} = 11,$$

$$2)\ \text{sowohl } n' = -\frac{-8 + 27}{5} = -\frac{19}{5} = -3\frac{4}{5},$$

$$\text{als auch } n = -\frac{(-13) + (-27)}{5} = -\frac{-40}{5} = -(-8) = 8,$$

$$3)\ \text{sowohl } n' = -\frac{32 + 17}{5} = -\frac{49}{5} = -9\frac{4}{5},$$

$$\text{als auch } n = -\frac{32 + (-12)}{5} = -\frac{20}{5} = -4 \ldots.$$

als auch würde sie sich aus den allgemeinen Werthen von n und n' ergeben, wenn wir diese für unsere beiden Fälle herstellen und hinsichtlich des durch obige Gleichungen ausgesprochenen Verhältnißes untersuchen würden.

---

*) Gemäß den Gleichungen:

$$\text{„}n^2 - \frac{2z + d}{d} \cdot n + \frac{2S}{d} = 0\text{“ und „}n^2 + \frac{2a - d}{d} \cdot n - \frac{2S}{d} = 0.\text{“}$$

Geometrische Progression.

§. 115.

I. Ungeschlossene Reihe.

Vermittelst des Ausdruckes der geometrischen Progression, wie wir ihn im §. 110 aufgestellt haben, lassen sich alle Glieder derselben herstellen, wenn das erste Glied a und der Quotient q gegeben sind. Es ist nemlich:

$$\frac{t_2}{t_1} = q, \text{ mithin } t_2 = t_1 q = aq,$$

$$\frac{t_3}{t_2} = q, \quad " \quad t_3 = t_2 q = aq^2,$$

$$\frac{t_4}{t_3} = q, \quad " \quad t_4 = t_3 q = aq^3, \text{ u. s. w.,}$$

woraus sich die Art der Bildung eines jeden Gliedes leicht erkennen läßt: jedes Glied ist nemlich das Produkt aus dem ersten Gliede a in eine Potenz des Quotienten q, deren Exponent um 1 kleiner als der Zeiger des Gliedes ist. Hienach ist z. B.

$$t_7 = aq^6,$$
$$t_{12} = aq^{11},$$
$$t_n = aq^{n-1}.$$

Der allgemeine Ausdruck einer geometrischen Progression, dargestellt durch die beiden gegebenen Größen a und q, ist daher:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \ldots, aq^{n-1}, aq^n, aq^{n+1}, \ldots$$

Obige Gleichung

$$t_n = aq^{n-1}\text{*)}$$

heißt, weil n jeden beliebigen Werth annehmen und so t_n jedes beliebige Glied der Reihe vorstellen kann, die Gleichung des allgemeinen Gliedes.

Wie bei der arithmetischen, so kann auch bei der geometrischen Progression die ungeschlossene Reihe nicht bloß aus dem ersten

---

*) In dieser Gleichung tritt die Analogie zwischen der arithmetischen und der geometrischen Progression ganz deutlich zu Tage: was dort additive steht, das hier multiplikative, was dort als Faktor, das hier als Exponent — und so geht $a + (n-1)\,d$ in $a \times q^{n-1}$ über.

Gliede und dem Quotienten, sondern auch aus irgend zwei gegebenen Gliedern hergestellt werden.

Z. B. Wie heißt die geometrische Progression, deren viertes Glied $= 1$, und deres achtes $= 16$ ist?

Auflösung. Wir haben die Gleichungen:

$$1)\ t_4 = 1 \text{ oder } aq^3 = 1,$$

$$2)\ t_8 = 16 \text{ oder } aq^7 = 16,$$

woraus $$\frac{aq^7}{aq^3} = q^4 = 16,$$

$$q = 2;$$

mithin ist nach 1)

$$a \cdot 2^3 = 1,$$

$$a = \frac{1}{8}.$$

Die fragliche Reihe ist sonach:

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16 \ldots,$$

in welcher Reihe 1 in der That das vierte, 16 das achte Glied ist.

II. Geschlossene Reihe.

Unter einer geschlossenen geometrischen Progression verstehen wir (siehe geschlossene arithmetische Progression, §. 113) eine solche, welche mit einem bestimmten, ersten Gliede anfängt, und mit einem bestimmten, letzten Gliede endigt.

Die ungeschlossene Reihe, welche durch a und q bekannt ist, geht in die geschlossene über, wenn man außer a und q noch

entweder die Anzahl der Glieder (n),

oder das letzte Glied (z),

also jedenfalls drei Stücke kennt.

Bezeichnet n (wie dieß immer der Fall) die Anzahl der Glieder der geschlossenen Reihe, so ist $t_n = z$, und daher

$$z = aq^{n-1} \text{ (I)},$$

aus welcher Gleichung des letzten Gliedes sich jede der vier unbestimmten Zahlen herstellen läßt, wenn die übrigen drei gegeben sind, so daß also auch a oder q die Unbekannten sein können. Daraus folgt, daß eine geschlossene geometrische Progression sich jedesmal herstellen lasse, sobald von den vier Stücken:

„erstes Glied (a), Quotient (q), Anzahl der Glieder (n), letztes Glied (z)“

irgend drei gegeben sind. Z. B.

Eine geometrische Progression von 7 Gliedern, deren letztes $= \frac{4}{27}$, hat zum Quotienten den Bruch $\frac{2}{3}$, wie heißt dieselbe?

Auflösung. Gemäß der Angabe haben wir als Gleichung des letzten Gliedes die folgende:

$$\frac{4}{27} = a \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6,$$

$$\text{woraus } a = \frac{4}{27} : \frac{64}{729} = \frac{27}{16};$$

daher ist die fragliche Progression:

$$\frac{27}{16}, \frac{9}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}.$$

Eine fünfte bei einer geschlossenen geometrischen Reihe mögliche Größe ist deren Summe; dieselbe wird für die allgemeine Reihe in ähnlicher Weise wie bei der arithmetischen Progression durch einen gewissen Kunstgriff hergestellt. Es ist nemlich:

$$S = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-3} + aq^{n-2} + aq^{n-1},$$
$$Sq = \quad aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n,$$

woraus entweder 1) $S - Sq = a - aq^n$, wenn $q < 1$,

oder 2) $Sq - S = aq^n - a$, wenn $q > 1$.

Aus 1) erhalten wir für eine fallende Reihe:

$$S = \frac{a - aq^n}{1 - q},$$

aus 2) für eine steigende:

$$S = \frac{aq^n - a}{q - 1},$$

welche Formeln sich, wegen $aq^n = aq^{n-1} \cdot q = z \cdot q$, auch wie folgt geben lassen:

$$1)\ S = \frac{a - qz}{1 - q},$$

$$2)\ S = \frac{qz - a}{q - 1}.$$

Anmerkung. Obige Summenformeln sind algebraische Ausdrücke, welche nicht bloß der betreffenden Summe dem Zahlenwerthe

nach gleich sind, sondern die Summe selbst nur unentwickelt darstellen. Vollzieht man nemlich die in diesen Ausdrücken anbefohlene Division, so erhält man zum Quotienten eine Summe, deren Summanden eben die aufeinander folgenden Glieder der geometrischen Progression sind. Z. B. für $n = 5$ ist

$$S = \frac{aq^5 - a}{q - 1} = aq^4 + aq^3 + aq^2 + aq + a \ .$$

$$\begin{array}{r} aq^5 - aq^4 \\ (-)\quad(+) \\ \hline aq^4 - a \\ aq^4 - aq^3 \\ (-)\quad(+) \\ \hline aq^3 - a \\ aq^3 - aq^2 \\ (-)\quad(+) \\ \hline aq^2 - a \\ aq^2 - aq \\ (-)\quad(+) \\ \hline aq - a \\ aq - a \\ (-)\quad(+) \\ \hline 0 \end{array}$$

Man könnte auch um die Summen solcher geometrischen Reihen fragen, welche in's Endlose fortgehen, und welche man daher unendliche nennt. Ist nun eine solche unendliche Reihe steigend, so versteht sich von selbst, daß ihre Summe unendlich groß sein müsse; ist sie aber fallend, so ist ihre Summe eine beschränkte. Man hat nemlich:

$$\begin{array}{rl} S = & a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots\ldots, \\ Sq = & \quad aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + aq^5 + \ldots\ldots, \\ & (-)\quad(-)\quad(-)\quad(-)\quad(-)\quad(-) \end{array}$$

mithin $S - Sq = a$, woraus

$$S = \frac{a}{1 - q}$$

als Summenformel für unendliche fallende Reihen.

Dergleichen Reihen ergeben sich bei der uneigentlichen Division, wie wir sie in den Beispielen 9) und 10) des §. 38. kennen

gelernt haben, wie ja auch die Division von $\frac{a}{1-q}$ selbst die unendliche Reihe gibt, als deren Summe wir diesen Ausdruck eben kennen gelernt haben.

Ein weiteres Beispiel des Vorkommens von unendlichen fallenden Reihen bieten uns die periodischen Dezimalbrüche. Es stellt nemlich jeder rein periodische Dezimalbruch, so wie auch der periodische Theil eines nicht rein periodischen, eine fallende unendliche Reihe vor, deren Summe den Werth des Dezimalbruches in einem gemeinen Bruche angibt. So ist

1) $0{,}333 \ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots.$,

in welcher Reihe $a = \frac{3}{10}$, $q = \frac{1}{10}$, daher

$$S = \frac{3}{10} : \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{3}{10} : \frac{9}{10} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

2) In $0{,}515151 \ldots. = \frac{51}{100} + \frac{51}{10000} + \frac{51}{1000000} + \ldots.$

ist $a = \frac{51}{100}$, $q = \frac{1}{100}$, mithin

$$S = \frac{51}{100} : \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{51}{100} : \frac{99}{100} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}.$$

3) Endlich ist in $0{,}925925925 \ldots. =$

$$= \frac{925}{1000} + \frac{925}{1000000} + \frac{925}{1000000000} + \ldots.$$

$a = \frac{925}{1000}$, $q = \frac{1}{1000}$, und somit

$$S = \frac{925}{1000} : \left(1 - \frac{1}{1000}\right) = \frac{925}{1000} : \frac{999}{1000} = \frac{925}{999} = \frac{25}{27}.$$

Aus diesen Beispielen sieht man nun leicht, woher die Regel stammt, welche die Arithmetik für die Verwandlung eines rein periodischen Dezimalbruches in einen gemeinen Bruch gibt: diese Regel, nach welcher man „unter die Ziffern der Periode so viele Neuner schreibt als die Periode Zifferstellen hat," ist nemlich nichts Anderes als der Ausdruck des Resultates, welches die Summation des periodischen Dezimalbruches als einer unendlichen geometrischen Reihe jedesmal ergibt.

4) in dem unrein periodischen Dezimalbruche

$$0{,}26363\ldots = \frac{2}{10} + \frac{63}{1000} + \frac{63}{100000} + \ldots$$

beginnt die unendliche geometrische Reihe mit dem periodischen Theile und zwar ist $a = \frac{63}{1000}$, $q = \frac{1}{100}$, daher

$$S = \frac{63}{1000} : \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{63}{1000} : \frac{99}{100} = \frac{63}{990},$$

der Dezimalbruch selbst aber =

$$= \frac{2}{10} + \frac{63}{990} = \frac{198 + 63}{990} = \frac{261}{990} = \frac{29}{110}.$$

Auch hier ist der Ausdruck des Resultates unserer Summation, wie er in $\left(\frac{2}{10} + \frac{63}{990}\right)$ vorliegt, offenbar die Quelle, aus welcher die betreffende Regel der Arithmetik geschöpft ist. Dieser gemäß wird „der nicht periodische Theil mit seinem betreffenden Nenner angesetzt und hiezu ein weiterer Bruch addirt, dessen Zähler die Periode, und dessen Nenner so viele Neuner enthält, als die Periode Ziffernstellen hat, mit so vielen angehängten Nullen, als der Periode Ziffernstellen vorangehen."

§. 116.

III. Rechnerisches.

Zur Bestimmung der geschlossenen geometrischen Reihe hat man gemäß §. 115. die beiden Gleichungen:

$$\text{I.}\quad z = aq^{n-1},$$

$$\text{II.}\quad S = \frac{aq^n - a}{q - 1},$$

für welche letztere man auch die Gleichung gebrauchen kann:

$$S = \frac{qz - a}{q - 1}.$$

Wenn daher von den fünf Größen, welche diese Gleichungen enthalten, drei *) gegeben sind, so lassen sich die beiden übrigen

*) Ueberhaupt wenn drei Stücke der geschlossenen Reihe gegeben sind, worunter also wenigstens eines von denen sein muß, welche die Reihe eben zur geschlossenen machen, als n, z oder S. [vgl. die folg. Aufg. 1)]

vermittelst der vorstehenden zwei Gleichungen bestimmen, und kann sonach die Reihe selbst hergestellt werden.

Dabei sind wie bei der arithmetischen Progression [§. 114] zehn verschiedene Paare der Unbekannten und somit zehn verschiedene Auflösungen möglich; es können nemlich unbekannt sein:

1) a und z, 5) z und q, 8) q und n, 10) n und S.
2) a „ q, 6) z „ n, 9) q „ S,
3) a „ n, 7) z „ S,
4) a „ S,

Untersucht man die Gleichungen, welche sich für die Bestimmung dieser Unbekannten in den einzelnen Fällen ergeben, so zeigt sich, daß die Lösung nur in den zwei Fällen 2) und 5), wo q neben a oder z unbekannt ist, auf höhere Gleichungen führt, in den andern acht Fällen aber durch einfache Gleichungen [§. 93.] möglich ist.

Unter diesen letztern kann man noch die bloß logarithmisch rechenbaren von denen unterscheiden, welche auch ohne Anwendung von Logarithmen löslich sind. Die bloß logarithmisch löslichen Fälle sind diejenigen vier, in welchen n unbekannt ist, nemlich 3), 6), 8) und 10); jedoch ist auch hier die logarithmische Lösung nur für n, keineswegs aber für die jeweilige andere Unbekannte nöthig. In den übrigen vier Fällen, 1), 4), 7) und 9), kann die Rechnung auch ohne Logarithmen geführt werden, insofern nicht die Potenzirung von q in q^n und q^{n-1} für die nicht logarithmische Berechnung Schwierigkeiten macht; besonders ist im Falle 9) die $\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$ wohl selten anders als logarithmisch ausführbar.

Dieß im Allgemeinen über die Auflösbarkeit dieser Gleichungen vorausgeschickt, lassen wir nun einige Beispiele solcher Auflösungen folgen und zwar hauptsächlich zu dem Zwecke, ein Paar besondere Bemerkungen hinsichtlich der Größe q daran zu knüpfen. Dieselben betreffen nemlich im Allgemeinen

1) das Zeichen von q, und zwar
   a) wenn q bekannt, aber n unbekannt,
   b) wenn q unbekannt und n bekannt ist,
2) die mehrfachen Werthe von q in den Fällen, wo die Lösung auf höhere Gleichungen führt;

ihr näherer Inhalt aber wird wohl am füglichsten im unmittelbaren Anschlusse an die betreffenden Aufgaben erörtert werden, welche hiemit folgen.

Beispiele.

ad 1) a. Das 3te Glied einer geometrischen Progression ist $= 6$, das 6te $= -\frac{3}{4}$, die Summe der Glieder $= 16\frac{1}{8}$;

welches ist diese Reihe?

Auflösung. Von den fünf Hauptgrößen einer geschlossenen geometrischen Reihe ist hier nur eine, die Summe, gegeben; da jedoch diese Größe eine solche ist, welche die Reihe zur geschlossenen macht, und zudem zwei andere Stücke der Reihe, d. h. zwei bestimmte Glieder derselben bekannt sind, vermittelst deren sich zwei weitere Hauptgrößen, a und q, berechnen lassen, so ist die Aufgabe vollkommen löslich, und wird, wie folgt, gelöst:

$$t_3 = aq^2 = 6,$$

$$t_6 = aq^5 = -\frac{3}{4},$$

$$\text{mithin } \frac{aq^5}{aq^2} = q^3 = -\frac{1}{8},$$

$$\text{woraus } q = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Es ist nun } aq^2 = a \cdot \frac{1}{4} = 6,$$

$$\text{daher } a = 24.$$

Die Unbekannten unserer Aufgabe sind mithin z und n, ein hinsichtlich der Größe n bloß logarithmisch rechenbarer Fall. Wir berechnen jedoch zuerst z und zwar nach der Formel:

$$S = \frac{qz - a}{q - 1}.$$

Nach dieser erhalten wir:

$$16\frac{1}{8} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot z - 24}{-\frac{1}{2} - 1},$$

$$\text{woraus } z = \frac{3}{8}.$$

Für n haben wir nun nach $z = aq^{n-1}$ die Gleichung:

$$\frac{3}{8} = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

welche beiderseits mit $-\frac{1}{2}$ multiplizirt die folgende gibt:

$$-\frac{3}{16} = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

oder $$\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{128}.$$

Aus dieser Gleichung kann erkannt werden, daß n eine ungerade Zahl, weil eine gerade Potenz einer negativen Zahl nicht negativ sein könnte; wir erhalten somit:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{128},$$

und nun erst die logarithmisch rechenbare Gleichung:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{128},$$

woraus $-n\,{}_{/2}\lfloor 2 = -\,{}_{/2}\lfloor 128$

und daher $n = 7$.

Wenn also q negativ ist (und n unbekannt), so muß man, um die nöthige logarithmische Gleichung formiren zu können, aus der gefundenen Gleichung immer zuerst ermitteln, ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl sei und hienach das Zeichen der Potenz $(-q)^n$ bestimmen.

b. Das erste Glied einer geometrischen Progression ist 25, das letzte $\frac{256}{25}$, die Anzahl der Glieder $= 5$; wie heißt die Progression?

Auflösung. Substituiren wir in die Gleichung $z = aq^{n-1}$ die gegebenen Werthe, so erhalten wir:

$$\frac{256}{25} = 25 \cdot q^4,$$

woraus $$q = \pm\sqrt[4]{\frac{256}{625}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Mit diesem Werthe von q wird die Reihe:

entweder $25, 20, 16, \frac{64}{5}, \frac{256}{25}$,

oder $25, -20, 16, -\frac{64}{5}, \frac{256}{25}$.

Wenn also $n-1$ eine gerade Zahl oder die Zahl der Glieder eine ungerade ist, so sind im Falle 9) zwei Werthe von q möglich, ein positiver und ein negativer, aber von gleicher Größe.

Natürlich ergeben sich damit auch zwei Werthe für S, wie z. B. in unserm Falle:

$$S = \frac{{}^4/_5 \cdot {}^{256}/_{25} - 25}{{}^4/_5 - 1} = \frac{1024 - 3125}{125} : -\frac{1}{5} = -$$

$$= -\frac{2101}{125} : -\frac{1}{5} = +\frac{2101}{25},$$

$$\text{oder: } S = \frac{-{}^4/_5 \cdot {}^{256}/_{25} - 25}{-{}^4/_5 - 1} = \frac{-1024 - 3125}{125} : -\frac{9}{5} = -$$

$$= -\frac{4149}{125} : -\frac{9}{5} = +\frac{461}{25},$$

welche zwei Werthe man auch durch direkte Summation obiger Reihen erhält.

ad 2) In den Fällen 2) und 5), wo q neben a oder z unbekannt ist, erhält man für q immer eine höhere Gleichung. Hiebei ist vor Allem zu bemerken, daß diese Gleichungen, wenn sie nach der gewöhnlichen Summenformel „$S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$" gebildet sind, um einen Grad zu hoch sind, indem ja $q^n - 1$ sich jedes Mal durch $q - 1$ dividiren läßt und dabei den Quotienten „$q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1$" gibt, so daß die anzuwendende Summenformel eigentlich heißt:

$$S = a(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1).$$

Beachtet man das nicht, so findet man unter den verschiedenen Werthen von n immer auch den von $q = 1$, welcher doch offenbar nie einer geometrischen Progression angehören kann. Z. B.

Das letzte Glied einer geometrischen Progression von 5 Gliedern sei $= \frac{27}{4}$, die Summe der Glieder $= \frac{181}{12}$; wie heißt die Progression?

Auflösung. Substituiren wir die gegebenen Werthe von z und n in die Gleichung des letzten Gliedes, so erhalten wir:

$$\frac{27}{4} = aq^4;$$

$$\text{und hieraus: } a = \frac{27}{4q^4}.$$

Diesen Werth für a in die Summenformel „$S = \frac{qz - a}{q - 1}$" gesetzt, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{181}{12} = \frac{\frac{27}{4}q - \frac{27}{4q^4}}{q - 1},$$

woraus $\frac{181}{12}q - \frac{181}{12} = \frac{27}{4}q - \frac{27}{4q^4}$,

$$\frac{181}{12}q^5 - \frac{181}{12}q^4 = \frac{27}{4}q^5 - \frac{27}{4},$$

$$100q^5 - 181q^4 + 81 = 0.$$

Hier sieht man nun auf den ersten Blick, daß ein Werth von $q = 1$ sei, denn es ist $100 - 181 + 81 = 0$; allein dieser Werth von q gehört bloß der obigen Gleichung des 5ten Grades, keineswegs aber der gesuchten geometrischen Progression an, welche für ihre Werthe von q nur eine Gleichung des 4ten Grades fordert, nemlich:

$$100q^4 - 81q^3 - 81q^2 - 81q - 81 = 0,$$

welche man erhält, entweder indem man aus der auf 0 gebrachten Gleichung des 5ten Grades den Faktor $(q - 1)$ hinwegschafft, oder indem man in der oben angesetzten Gleichung:

$$\frac{181}{12} = \frac{\frac{27}{4}q - \frac{27}{4q^4}}{q - 1},$$

die sofort mögliche Division mit $q - 1$ auch wirklich ausführt.

Nun ist in obiger Gleichung ein Werth von $q = -\frac{3}{4}$, denn

$$100 \cdot \frac{81}{256} - 81 \times \left(-\frac{27}{64} + \frac{9}{16} - \frac{3}{4} + 1\right)$$

$$= 81 \cdot \frac{25}{64} - 81 \cdot \frac{-27 + 36 - 48 + 64}{64}$$

$$= 81 \cdot \frac{25}{64} - 81 \cdot \frac{25}{64} = 0;$$

dividiren wir sie ferner durch den diesem Werthe entsprechenden Faktor $(4q + 3)$, so erhalten wir zur Bestimmung weiterer Werthe die kubische Gleichung:

$$25q^3 - 39q^2 + 9q - 27 = 0.$$

Aus dieser findet man durch Näherung $q = \frac{103}{60}$, welches denn der zweite mögliche Werth von q ist. Stellt man endlich durch Division der kubischen Gleichung mit dem Faktor $(60q - 103)$,

welcher dem zuletzt gefundenen Werthe entspricht, die ungefähre quadratische Gleichung her:

$$5q^2 + \frac{47}{60}q + \frac{11321}{3600} = 0,$$

so ergeben sich daraus zwei weitere Werthe von q, welche jedoch bei dem Verhältnisse zwischen den Constanten, wie es hier Statt findet, auch größere Genauigkeit derselben vorausgesetzt, jedenfalls imaginär sind.

Unsere Aufgabe läßt also zwei verschiedene Werthe von q, mithin auch zwei verschiedene Progressionen zu; die eine, mit dem Quotienten $-\frac{3}{4}$, ist:

$$\frac{64}{3}, -16, 12, -9, \frac{27}{4},$$

welche 5 Glieder wirklich die Summe $\frac{181}{12} = 15\frac{1}{12}$ geben; die andere, mit dem genäherten Quotienten $\frac{103}{60}$, wird:

$$0{,}777,\quad 1{,}334,\quad 2{,}290,\quad 3{,}932,\quad 6{,}750,$$

welche Reihe abermals $15{,}083\ldots = 15\frac{1}{12}$ ungefähr zur Summe gibt.

In den Fällen 2) und 5) sind also so viele verschiedene Progressionen möglich, als die vom Faktor $(q-1)$ befreite höhere Gleichung mögliche (reelle) Werthe für q gibt.

Zur weitern Bestätigung noch ein einfacheres Beispiel:

Das letzte Glied einer Progression von 3 Gliedern, deren Summe $= -13$, ist $= -9$; welches ist diese Progression?

Auflösung. Wir haben:

$$-9 = aq^2,$$

woraus $a = -\frac{9}{q^2}$;

diesen Werth in die bekannte zweite Summenformel substituirt, erhält man:

$$-13 = \frac{-9q + \frac{9}{q^2}}{q-1},$$

woraus sich die kubische Gleichung ableitet:

$$4q^3 - 13q + 9 = 0.$$

Natürlich ist auch hier wieder zunächst $q = 1$; schaffen wir den diesem Werthe entsprechenden überflüssigen Faktor $(q - 1)$ hinaus, so erhalten wir für unsere gesuchte Progression selbst die quadratische Gleichung:

$$4q^2 - 9q - 9 = 0,$$

aus welcher entweder $q = 3$,

oder $q = -\frac{3}{4}$ abgeleitet wird.

Die beiden möglichen Progressionen sind daher:

entweder $-16, 12, -9,$

oder $-1, -3, -9,$

und beide geben in der That die geforderte Summe — 13.

Werthberechnungen nach Zinseszinsen.

§. 117.

Von den Progressionen wird in der praktischen Rechenkunst wenig eigentliche Anwendung gemacht: die arithmetische findet eine solche etwa in der Berechnung der Fallräume frei fallender Körper (Physik) oder des Inhaltes stetig zunehmender Flächen oder Körper (Geometrie); die geometrische aber haben wir bereits [§. 115.] zur Summirung periodischer Dezimalbrüche oder unendlicher durch uneigentliche Division entstandenen Reihen benützt. Hingegen hat man zur Einübung der Lehre von den Progressionen vielfach eigene Aufgaben ausgedacht, bei denen es immer darauf ankommt, in den gegebenen oder gesuchten Größen der Aufgabe die entsprechenden Größen einer arithmetischen oder geometrischen Progression zu erkennen, und sie demgemäß in die hiefür aufgestellten Gleichungen zu substituiren. Da aber hiemit auch Alles gesagt ist, was diese Aufgaben Eigenthümliches hinsichtlich ihrer Anwendung auf Progressionen haben, indem sie im Uebrigen ganz mit denen zusammen fallen, in welchen die Lehre von den Gleichungen ihre Anwendung findet [§. 106.], so mag von einer Durchführung solcher Aufgaben hier um so mehr Umgang genommen werden, als ohnehin jede Beispiel-Sammlung, namentlich auch die bereits erwähnte von Dr. Pollak, deren zur genügenden Auswahl enthält.

Ein ganz Anderes ist es mit einer gewißen Reihe von Aufgaben, welche man füglich unter der gemeinschaftlichen Bezeichnung „Werthberechnungen nach Zinseszinsen" zusammenfaßt: nicht bloß findet nemlich bei diesen die Lehre von den geometrischen Progressionen eine eigentliche, weil nothwendige Anwendung, und wird vielfach Gelegenheit geboten, die Rechnung mit den Logarithmen, die Auflösung von höhern Gleichungen ꝛc. zu üben, sondern diese Aufgaben entbehren auch noch immer einer richtigen und vollständigen Zusammenstellung. Eine solche wird daher gleichsam als Schluß-Anwendung der gesammten Algebra im Folgenden gegeben.

Es gibt verschiedene Dinge (Größen), welche in ihrem Betrage veränderlich sind, d. h. an Größe zu- oder abnehmen, sich vermehren oder vermindern. Geschieht diese Vermehrung oder Verminderung regelmäßig oder wenigstens im Durchschnitte regelmäßig, so ist es möglich, aus dem gegenwärtigen Betrage (Bestande, Werthe) den einstigen, umgekehrt aus diesem jenen zu berechnen. Solche Dinge sind z. B. ein Kapital, welches verzinslich angelegt ist, aber dessen Zinsen nicht oder wenigstens nicht ganz erhoben werden, — ein Kapital, welches durch fortgesetzte Hinwegnahme von Summen über dem Zinsenbetrage fortwährend vermindert wird, — die Bevölkerung einer Stadt, eines Landes, welche sich durch einen Ueberschuß der Geburten über die Sterbfälle vermehrt, oder aus der entgegengesetzten Ursache vermindert, — der Bestand einer Waldung, welcher durch Zuwachs sich fort und fort vergrößert, u. dgl.

Dabei kommt es natürlich auch darauf an, ob der Betrag, dessen Werth für eine andere als die Zeit, in welcher er gegeben ist, ermittelt werden soll, nur einmal eintritt, oder ob er sich mehrmals und in welchen Perioden wiederholt. Hienach unterscheiden wir folgende drei Klassen von Aufgaben:

A. Werthbestimmung eines einzelnen Betrages, —
B. Werthbestimmung periodisch wiederkehrender Beträge, —
C. Werthbestimmung von einzelnen in Verbindung mit periodisch wiederkehrenden Beträgen.

A. Werthbestimmung eines einzelnen Betrages.

Es sei K der gegenwärtige Betrag (Werth) irgend eines Dinges, und vergrößere sich derselbe

mit jedem Jahre um p%; welches wird der Werth dieses Dinges, d. h. die Größe seines Betrages, in n Jahren sein?

Der gewöhnlichste in dieser allgemeinen Aufgabe begriffene spezielle Fall ist der, daß jenes Ding ein Kapital (K) sei, welches sich mit jedem Jahre dadurch vergrößert, daß dessen Zinsen nicht erhoben, sondern abermals zum Kapitale geschlagen, d. h. mit dem Kapitale verzinset werden. Von diesen wieder Zinsen tragenden Zinsen heißt die Rechnung, durch welche hier die Werthbestimmung geschieht, Zinseszinsen-Rechnung.

Bezeichnen wir, um an die Lösung unserer Aufgabe zu gehen, die Zunahme im ersten Jahre mit x, den Gesammt-Betrag am Ende dieses ersten Jahres mit S_1, so ist

$$S_1 = K + x;$$

aber gemäß der Proportion:

$$100 : p = K : x,$$

$$\text{ist } x = \frac{Kp}{100}, \text{ mithin}$$

$$S_1 = K + \frac{Kp}{100} = K \times \frac{100 + p}{100}.$$

Diesen Quotienten $\frac{100 + p}{100}$ bezeichnet man bequemer mit q, so daß

$$S_1 = Kq,$$

woraus sich sodann die einfache Regel ergibt:

Man findet den Gesammtbetrag (die Summe von Kapital und Zinsen) nach je einem Jahre, wenn man den ursprünglichen Betrag (das Kapital) mit obigem Quotienten q multiplizirt.

Nach dieser Regel ist es dann, wenn man den Gesammtbetrag am Ende des 2ten Jahres mit S_2,

" " " 3ten " " S_3,

" " " 4ten " " S_4 u. s. w.

bezeichnet, ganz leicht, folgende Reihe von Sätzen herzustellen:

$$S_2 = S_1 q = Kq \cdot q = Kq^2,$$
$$S_3 = S_2 q = Kq^2 \cdot q = Kq^3,$$
$$S_4 = S_3 q = Kq^3 \cdot q = Kq^4 \text{ u. s. w.}$$

Offenbar sind in diesen Sätzen bloß die Zeiger von S und die Exponenten von q veränderlich, aber diese beiden Größen in jedem Falle einander gleich; bezeichnet man demnach den Gesammtbetrag nach n Jahren mit S_n, so ist auch

$$S_n = Kq^n \text{ (I)}.$$

Diese nämliche Gleichung dient aber nicht bloß dazu, um aus dem vorhergehenden Werthe den nach n Jahren Statt habenden, aus dem Vorwerthe den Nachwerth zu berechnen, sondern auch die umgekehrte Aufgabe findet darin eben so gut ihre Lösung. Es sei nemlich S_n oder kurz S der Betrag eines Dinges in irgend einer Zeit, so ist offenbar der n Jahre vorher Statt findende Betrag eben der, welcher sammt seiner in n Jahren sich ergebenden Vermehrung zum Gesammtbetrage von S_n oder S anwächst, also kein anderer als K; mithin stellt sich für diesen umgekehrten Fall die Gleichung (I) so:

$$K = \frac{S}{q^n}.$$

Wird durch diese Gleichung der Werth eines später eintretenden Betrages, einer später fälligen Summe, für einen frühern Zeitpunkt bestimmt, so heißt man das, jenen Betrag diskontiren, weil man eben den Unterschied zwischen dem spätern und dem frühern Werthe, also die Differenz

$$S - K = K(q^n - 1)$$

das Disconto nennt.

B. Werthbestimmung periodisch wiederkehrender Beträge.

Hier sind je nach der Art der periodischen Wiederkehr und nach dem Verhältnisse der Periode zur gebrauchten Zeit-Einheit zu unterscheiden:

I. einfach periodische Beträge und zwar
   a) deren Periode = der Zeit-Einheit (gewöhnlich ein Jahr),
   b) deren Periode Z als die Zeit-Einheit,
II. zusammengesetzt periodische Beträge.

I. a) Es sei A ein n Jahre hindurch jährlich sich ergebender Betrag, z. B. eine jährlich zurückgelegte Summe, so berechnet sich der Werth S_n, auf welchen diese jährlichen Beträge in n Jahren sich belaufen, unter der Voraussetzung, daß dieselben nicht erhoben sondern auf Zinseszinsen angelegt (admassirt) werden; in folgender Weise:

Am Ende des ersten Jahres, wo der erste Betrag erst fällig wird, ist der Werth dieses Betrages dem Betrage selbst gleich, also

$$S_1 = A;$$

dieses S_1 vermehrt sich bis zum Ende des zweiten Jahres mit seinen Zinsen auf $S_1.q$, wozu noch der wiederkehrende Betrag A selbst kommt, so daß der Gesammtwerth am Ende des zweiten Jahres oder

$$S_2 = S_1 q + A = Aq + A \text{ ist;}$$

ebenso vermehrt sich S_2 bis zum Ende des dritten Jahres auf $S_2 q$, und da der Betrag A abermals hinzukommt, ist der Gesammtbetrag am Ende dieses Jahres oder

$$S_3 = S_2 q + A = (Aq + A)\, q + A = Aq^2 + Aq + A.$$

Setzen wir in derselben Weise fort, so finden wir:

$$S_4 = S_3 q + A = Aq^3 + Aq^2 + Aq + A,$$
$$S_5 = S_4 q + A = Aq^4 + Aq^3 + Aq^2 + Aq + A \text{ u. s. w.}$$

Jeder dieser aufeinander folgenden Gesammtbeträge ist offenbar der Summe einer geometrischen Progression gleich, in welcher das erste Glied A, der Quotient q, die Anzahl der Glieder aber dem Jahreszeiger gleich ist: mithin ist dieser Gesammtbetrag nach n Jahren oder

$$S_n = Aq^{n-1} + Aq^{n-2} + Aq^{n-3} + \ldots . Aq^2 + Aq + A,$$

oder wirklich summirt,

$$S_n = \frac{Aq^n - A}{q - 1} \quad \text{(II)}.$$

Es kann aber ferner auch die Frage nach dem gegenwärtigen Werthe aller dieser jährlichen Beträge oder Zahlungen entstehen; dieß ist der Fall, wenn es sich darum handelt, für eine Reihe solcher jährlichen Zahlungen durch sofortige Baarzahlung (eben des gegenwärtigen Werthes derselben) ein Aequivalent zu leisten. Diesen gegenwärtigen oder baaren Werth (K) zu finden, kann man zweierlei Wege einschlagen:

1) Man diskontirt den Gesammtwerth aller Beträge, d. i. S_n für n Jahre Vorausbezahlung, wobei man erhält:

$$K = \frac{S_n}{q^n} = \frac{Aq^n - A}{q - 1} : q^n,$$

$$\text{oder } Kq^n = \frac{Aq^n - A}{q - 1} \text{ (III.)};$$

2) oder man diskontirt jeden einzelnen Betrag für die Zeit, um welche er vorausbezahlt wird, d. h. den ersten für ein Jahr, den zweiten für zwei Jahre u. s. w.; dabei erhält man:

$$K = \frac{A}{q} + \frac{A}{q^2} + \frac{A}{q^3} + \ldots\ldots \frac{A}{q^{n-2}} + \frac{A}{q^{n-1}} + \frac{A}{q^n}.$$

Multiplizirt man die ganze Gleichung mit q^n, so erhält man:

$$Kq^n = Aq^{n-1} + Aq^{n-2} + Aq^{n-3} + \ldots\ldots + Aq^2 + Aq + A,$$

woraus abermals wie bei 1)

$$Kq^n = \frac{Aq^n - A}{q - 1}.$$

Läßt man obige geometrische Progression in's Endlose fortgehen, so gibt

$$K = \frac{A}{q} + \frac{A}{q^2} + \frac{A}{q^3} + \frac{A}{q^4} + \ldots\ldots$$

den Baar-Werth an, welchen ein nicht bloß eine Reihe von Jahren hindurch, sondern immer fort jährlich wiederkehrender Betrag A habe; es ist nemlich

$$K = \frac{A}{q} : \left(1 - \frac{1}{q}\right) = \frac{A}{q - 1}.$$

In der That ist sodann $A = K(q - 1) = Kq - K$, d. h. gleich dem Jahreszinse*) von K; der Baarwerth jener sich fort und fort wiederholenden Beträge (Einnahmen) ist also gerade von der Größe, daß sich diese Beträge als die jährlichen Zinsen desselben ergeben.

I. b) Kehrt ein gewisser Ertrag A nicht alle Jahre, sondern nur je nach einer gewissen Anzahl (m) von Jahren wieder, so be-

---

*) Es ist nemlich gemäß der unter A) gegebenen Regel Kq die Summe des Kapitals und seines Jahreszinses, mithin Kq — K dieser Jahreszins für sich.

rechnet sich der einstige Werth, wenn man ihn nach m Jahren, wo der Ertrag zum ersten Male eintritt, mit S_1, nach 2m Jahren mit S_2, nach nm Jahren mit S_n bezeichnet, auf ähnliche Weise wie bei I. a). Es ist nemlich:

$$S_1 = A,$$
$$S_2 = Aq^m + A,$$
$$S_3 = Aq^{2m} + Aq^m + A,$$
$$S_4 = Aq^{3m} + Aq^{2m} + Aq^m + A,$$

mithin offenbar

$$S_n = Aq^{(n-1)\,m} + Aq^{(n-2)\,m} + \ldots Aq^m + A.$$

Dieser Werth bildet wieder eine geometrische Progression von n Gliedern, deren Quotient q^m ist; summiren wir sie wirklich, so erhalten wir:

$$S_n = \frac{Aq^{(n-1)\,m} \cdot q^m - A}{q^m - 1} = \frac{Aq^{nm} - A}{q^m - 1} \text{ (IV).}$$

Die umgekehrte Aufgabe, für diese periodischen Beträge den gegenwärtigen Werth (K) zu bestimmen, kann wie die gleiche Aufgabe unter I. a) in doppelter Weise gelöst werden:

1) Man diskontirt den einstigen, d. h. in nm Jahren Statt findenden Werth für diese nm Jahre Vorausbezahlung, wornach man erhält:

$$K = \frac{S^n}{q^{nm}} = \frac{Aq^{nm} - A}{q^m - 1} : q^{nm},$$

$$\text{daher } Kq^{nm} = \frac{Aq^{nm} - A}{q^m - 1} \text{ (V);}$$

2) oder man diskontirt jeden einzelnen Betrag und summirt die dadurch erhaltenen einzelnen Jetzt-Werthe, so daß

$$K = \frac{A}{q^m} + \frac{A}{q^{2m}} + \frac{A}{q^{3m}} + \ldots \frac{A}{q^{(n-1)\,m}} + \frac{A}{q^{nm}};$$

multiplizirt man diese Gleichung mit q^{nm}, so erhält man:

$$Kq^{nm} = Aq^{(n-1)m} + Aq^{(n-2)m} + \ldots + Aq^m + A,$$

$$\text{woraus } Kq^{nm} = \frac{Aq^{nm} - A}{q^m - 1}, \text{ wie oben.}$$

Kehren die periodischen Beträge nicht bloß während einer gewissen Zeit von nm Jahren, sondern fort und fort wieder, so ist die Summe der einzelnen Jetzt-Werthe durch die folgende unendliche Reihe ausgedrückt:

$$K = \frac{A}{q^m} + \frac{A}{q^{2m}} + \frac{A}{q^{3m}} + \frac{A}{q^{4m}} + \ldots\ldots,$$

$$\text{wornach } K = \frac{A}{q^m} : (1 - q^m) = \frac{A}{q^m - 1} \text{ (VI).}$$

Dieser Werth ist denn auch den Bedingungen der Aufgabe völlig entsprechend; es ist nemlich hienach

$$Kq^m - K = A,$$

d. h. der Jetzt-Werth, etwa das angelegte Kapital K, wächst in m Jahren (zu Kq^m) so an, daß der Ueberschuß über das Kapital selbst gerade den Betrag A ausmacht; nach abermals m Jahren ergibt sich derselbe Ueberschuß wieder, der Betrag A tritt also nach 2m Jahren wieder ein, nach 3m Jahren eben so u. s. w.

II. Es kommt endlich wohl auch der Fall vor, daß ein Objekt in verschiedenen Zeiten verschiedene Beträge darbietet, wie z. B. eine Waldung mit ihren verschiedenen und zu verschiedenen Zeiten eintretenden Nutzungen. Käme nun jeder dieser Beträge nur einmal, oder auch nur zwei- oder dreimal vor, so ließe sich, es möchte sich um die Bestimmung des einstigen oder des gegenwärtigen oder überhaupt des zu irgend einer Zeit Statt findenden Werthes handeln, wohl nichts anders thun, als den fraglichen Werth für jeden einzelnen Betrag nach A. berechnen, worauf die Summe aller einzelnen Werthe den Gesammt-Werth gäbe.

Ein Anderes aber ist es, wenn alle diese Beträge, welche unter sich in verschiedenen Zeiten eintreten, je nach gleichen Zeiten und zwar fort und fort wiederkehren. Natürlich handelt sich's dabei nicht mehr um den einstigen, sondern wie bei allen solchen immer wiederkehrenden Beträgen um den gegenwärtigen Werth. Diesen findet man, indem man den Werth jedes einzelnen Betrages für das Ende der Periode bestimmt, und nun die Sache so ansieht, als wären alle Beträge mit diesen Werthen am Ende der Periode fällig, so daß man nur mehr einfach periodische Beträge hat, für welche der Jetzt-Werth nach Gleichung VI. bestimmt wird.

Um dieß in einem Beispiele klar zu machen, ergebe sich

der Betrag A_1 nach n_1 Jahren,

" " A_2 " n_2 "

" " A_3 " n_3 "

" " A_4 " n_4 " und zwar so, daß je nach

n_4 Jahren alle diese Beträge sich fort und fort wiederholen, also n_4 die Zeit der einfachen Periode sei.

Berechnen wir die Werthe der verschiedenen Beträge für die Zeit von n_4 Jahren, so ist

der Werth von $A_1 = A_1 q^{n_4 - n_1}$,

" " " $A_2 = A_2 q^{n_4 - n_2}$,

" " " $A_3 = A_3 q^{n_4 - n_3}$,

" " " $A_4 = A_4 (= A_4 q^{n_4 - n_4})$;

---

mithin ist der Gesammtw. $S = A_1 q^{n_4 - n_1} + A_2 q^{n_4 - n_2} + A_3 q^{n_4 - n_3} + A_4$.

Dieser Gesammt-Betrag wiederholt sich je nach n_4 Jahren, mithin ist gemäß VI. sein Jetzt-Werth

$$K = \frac{S}{q^{n_4} - 1} = \frac{A_1 q^{n_4 - n_1} + A_2 q^{n_4 - n_2} + A_3 q^{n_4 - n_3} + A_4}{q^{n_4} - 1} \quad \text{(VII)}.$$

C. Werthbestimmung von einzelnen in Verbindung mit periodischen Beträgen.

Der Fall einer solchen Verbindung tritt ein, wenn ein gegenwärtig, d. h. im Augenblicke der Rechnungsstellung fälliger Betrag mit periodischen Beträgen, deren Periode im nämlichen Augenblicke ihren Anfang nimmt, zusammengeworfen, d. h. wenn um den gemeinschaftlichen Werth Beider gefragt wird. Diese Frage kann aber offenbar nicht den gegenwärtigen Werth betreffen; denn dieser ist von dem eben fälligen Betrage an sich, von den periodischen Beträgen aber aus B. bekannt: wir haben es also hier bloß mit dem einstigen Werthe zu thun.

Es sei der gegenwärtige Betrag $= K$, die periodischen Beträge aber seien zeitweilige und zwar entweder nach I. a) oder I. b), so ist der einstige Werth von K je nach der Zeit, für welche er gesucht wird, gemäß Gleichung I., der Werth der periodischen Beträge aber gemäß Gleichung II. oder IV. zu berechnen; wir haben sonach als Gesammtwerth

entweder a) $$S = Kq^n + \frac{Aq^n - A}{q - 1} \quad \text{(VIII)},$$

oder b) $$S = Kq^{nm} + \frac{Aq^{nm} - A}{q^m - 1}.$$

Da die letztere Gleichung von der erstern sich nicht eigentlich unterscheidet, vielmehr wenn wir $q^m = Q$ setzen, völlig in dieselbe

Form übergeht, so wollen wir, um die möglichen Fälle nicht noch mehr zu vervielfältigen, von dem unter b) begriffenen Falle hier nicht weiter handeln. Unter A verstehen wir also in dieser Abtheilung C. nur jährlich sich wiederholende, zeitweilige Beträge.

Gehen wir auf die besondern Anwendungen der Gleichung VIII. näher ein, so sind es hauptsächlich zwei Fälle, welche, aus derselben durch spezielle Voraussetzungen entwickelt, auch für die praktische Rechenkunst von größerer Wichtigkeit sind.

I. Die erste dieser Voraussetzungen ist, daß $K = A$, d. h. daß der gegenwärtig fällige Betrag kein anderer als der jährlich wiederkehrende sei, also die periodischen Beträge bereits im Augenblicke der Rechnungsstellung (nicht wie bisher nach einem Jahre) beginnen. Bei den sogenannten Lebensversicherungen findet dieser Fall seine volle Anwendung, nemlich unter den folgenden Umständen:

Jemand will einem Zweiten nach seinem, des Ersten Tode eine gewisse Summe S zusichern*); zu diesem Ende läßt er sein Leben versichern, indem er an eine Lebensversicherungs-Anstalt sowohl unmittelbar bei seiner Aufnahme, als auch mit jedem folgenden Jahre bis zu seinem Tode einen jährlichen Beitrag A einzahlt. Dieser Beitrag ist so berechnet, daß sämmtliche Beiträge sammt ihren Zinsen und Zinseszinsen in der Zeit, welche der Versicherte muthmaßlich noch zu leben hat, eben zur Summe S anwachsen, welche sodann nach des Versicherten Tode von der Anstalt an jenen Zweiten oder überhaupt an den ausbezahlt wird, der sich im rechtlichen Besitze der Versicherungs-Urkunde befindet. Lebt der Versicherte länger als die Anstalt muthmaßlich angenommen hatte, wobei sie sich auf die Sterblichkeits-Verhältniße stützt, welche gemäß den Mortalitäts-Tabellen für die verschiedenen Lebensalter Statt finden, so zahlt er mehr ein als die Versicherungssumme beträgt, die Anstalt ist somit im Vortheile; umgekehrt ist sie im Nachtheile, wenn er eher stirbt.

---

*) Es kann sich auch wohl Jemand für den Fall, daß ein Anderer stirbt, eine gewisse Summe zusichern wollen; in diesem Falle läßt er das Leben dieses Andern versichern, zahlt nemlich die betreffenden Beiträge selbst, und erhält sodann nach dem Tode des Versicherten die ausgemachte Versicherungssumme.

Die Gleichung, welche für diese Versicherungs-Rechnung in Anwendung kommt, erhält man, wenn man in VIII. K = A setzt; es ist nemlich sodann

$$S = Aq^n + \frac{Aq^n - A}{q - 1},$$

$$\text{oder} \quad S = \frac{Aq^{n+1} - Aq^n + Aq^n - A}{q - 1},$$

$$\text{mithin} \quad S = \frac{Aq^{n+1} - A}{q - 1} \quad \text{(IX)}.$$

II. Eine zweite Modifikation der Gleichung VIII. ergibt sich, wenn man A negativ nimmt; dieß hat den Sinn, daß Derjenige, welchem der gegenwärtig fällige Betrag zusteht, statt die periodischen Beträge gleichfalls zu beziehen, sie umgekehrt hinaus zu bezahlen hat. Die Gleichung hiefür ist:

$$S = Kq^n - \frac{Aq^n - A}{q - 1} \quad \text{(X)},$$

$$\text{oder auch:} \quad S = \frac{[K(q-1) - A]\, q^n + A}{q - 1}.$$

In dieser letztern Form ist es besonders die Differenz $K(q - 1) - A$, d. h. die Differenz zwischen dem Jahreszinse des Kapitals K und zwischen der jährlich hinaus zu bezahlenden Summe A, von welcher die Größe von S abhängig erscheint und, wie wir sogleich sehen werden, auch wirklich abhängt; ist nemlich

a) diese Differenz $= 0$, also $K(q - 1) = A$, so wird

$$S = \frac{[K(q-1) - K(q-1)]\, q^n + K(q-1)}{q - 1} = K,$$

d. h. wenn die jährlich hinauszubezahlende Summe gerade den Jahreszins des ursprünglichen Kapitals beträgt, so bleibt dieses Kapital in seinem unveränderten Betrage, was bekanntlich vollkommen richtig ist.

b) Ist die Differenz $K(q - 1) - A$ positiv, also etwa $K(q - 1) - A = B$, woraus $A = K(q - 1) - B$, so wird

$$S = \frac{Bq^n + K(q-1) - B}{q - 1}$$

$$\text{oder} \quad S = K + \frac{Bq^n - B}{q - 1},$$

d. h. wenn der Jahreszins größer ist als die jährlich hinauszubezahlende Summe, so vermehrt sich das Kapital und zwar in

n Jahren um den in dieser Zeit statthabenden Werth eines jährlich wiederkehrenden Betrages von der Größe jenes jährlichen Ueberschußes, ein Satz, dessen Richtigkeit ebenfalls sogleich in die Augen fällt.

c) Ist endlich $K(q-1)-A$ negativ, etwa $K(q-1)-A=-C$, woraus $A=K(q-1)+C$, so wird

$$S=\frac{-Cq^n+K(q-1)+C}{q-1}$$

oder $$S=K-\frac{Cq^n-C}{q-1},$$

d. h. wenn der Jahreszins kleiner ist als die jährlich hinauszubezahlende Summe, so wird das Kapital immer kleiner und zwar in n Jahren um den Werth eines jährlich wiederkehrenden Betrages von der Größe jenes negativen Ueberschußes, was ebenfalls ganz klar ist.

In diesem letzten Falle entsteht denn die Frage, wann das Kapital vollends verzehrt oder $S=0$ sein werde; das ist offenbar der Fall, wenn

$$K=\frac{Cq^n-C}{q-1}.$$

Führen wir hier statt C die ursprünglichen Größen wieder ein, so erhalten wir:

$$K=\frac{-[K(q-1)-A]\,q^n+K(q-1)-A}{q-1},$$

$$K=-Kq^n+\frac{Aq^n}{q-1}+K-\frac{A}{q-1},$$

daher $$Kq^n=\frac{Aq^n-A}{q-1},$$

welche Gleichung offenbar mit der in B. unter I. a) erhaltenen Gleichung III. identisch ist; es ist aber auch in der That die Sache die nämliche: hier wie dort handelt es sich um den gegenwärtigen Werth K eines n Jahre hindurch jährlich wiederkehrenden Betrages A; dort ist es einfach dieser Werth, welcher gesucht wird, hier aber ist er es mit der Nebenbedeutung eines Kapitals, welches gegenwärtig angelegt werden muß, wenn man jenen Betrag n Jahre hindurch davon beziehen will.

In diesem Sinne nun findet die Gleichung III. in der sogenannten Rentenrechnung ihre Anwendung. Legt nemlich

Jemand ein Kapital K zu dem Zwecke an, davon jährlich eine die Zinsen übersteigende Summe A zu beziehen, so heißt jenes Kapital die Einlage (Mise), dieser jährliche Bezug die Rente, der sie bezieht, der Rentier, umgekehrt Derjenige, welcher die Einlage in Empfang nimmt und die Rente dafür leistet, der Unternehmer (Entrepreneur).

Hiebei kann

a) die Rente für eine bestimmte Zeit, oder

b) auf Lebenszeit bedungen werden; im erstern Falle wird die Größe der Rente (Zeitrente) für die bedungene Zeit, im letztern für die muthmaßliche Lebenszeit berechnet und heißt dann Leibrente; in beiden Fällen geschieht dieß natürlich eben nach unserer Gleichung III.

§. 118.

Es erübrigt nun nur noch, den Gebrauch der im vorhergehenden §. aufgestellten Gleichungen in einigen Beispielen klar zu machen; doch wird es, ehe wir wirklich einige specielle Aufgaben durchführen, nicht unzweckdienlich sein, im Allgemeinen über das Rechnerische in unsern Gleichungen Folgendes zu bemerken:

Vor Allem versteht es sich wohl von selbst, daß es sich nicht immer um den gegenwärtigen oder einstigen Werth (Vor- oder Nachwerth) handle, sondern daß diese Werthe auch beide gegeben sein und dann gefragt werden könne, in welcher Zeit der eine in den andern übergehe, oder bei welcher jährlichen Zunahme dieß in einer bestimmten Zeit geschehe u. s. w. Kurz, es kann jede von den in unsern Gleichungen vorkommenden Größen die Unbekannte sein.

Untersuchen wir nun, wie es mit der Auflösung dieser Gleichungen stehe, je nachdem diese oder jene Größe die Unbekannte ist, so können wir, wenn wir einstweilen die Gleichungen I., VI. und VII. außer Acht lassen, für die übrigen folgende drei Fälle unterscheiden:

1) Wenn q unbekannt, so gehen diese Gleichungen immer in höhere Gleichungen über; hiebei ist ferner zu bemerken, daß q oder in den betreffenden Fällen $q^m = Q$ immer auch den Werth 1 habe, der aber nur von dem nicht ausgeschiedenen Faktor $(q-1)$ oder (q^m-1) herrührt, also der eigentlichen Werthgleichung nicht

angehört. Uebrigens ist es, obgleich die Gleichung durch Wegschaffung dieses Faktors um Einen Grad niedriger würde, dennoch nicht vortheilhaft, dieses zu thun, weil man hiebei immer eine ungleich größere Anzahl mit der Unbekannten behafteter Glieder erhielte, als man ursprünglich hat.

2) Wenn A unbekannt, so darf man bloß q^n, resp. $Q^n = (q^m)^n$, natürlich logarithmisch herstellen, worauf sich die Gleichungen ganz einfach lösen lassen.

3) Wenn S, K oder n unbekannt sind, so lassen sich die Gleichungen immer in eine logarithmisch rechenbare Form bringen; so geht z. B. die Gleichung III. in diesen Fällen über in:

$$A = [A - K(q - 1)]\, q^n,$$

oder die Gleichung VIII. in:

$$[S(q - 1) + A] = [K(q - 1) + A]\, q^n,$$

welche beide die Form der Gleichung I.

$$S = Kq^n$$

haben und wie diese vollkommen logarithmisch löslich sind.

Mithin bleiben nur mehr die Gleichungen VI. und VII. zu besprechen übrig. Von diesen ist die erstere

$$K = \frac{A}{q^m - 1},$$

so lange K bekannt, vollkommen logarithmisch löslich, besonders in der Form:

$$Kq^m = (K + A);$$

ist K unbekannt, so muß eben $q^m = Q$ für sich logarithmisch dargestellt werden, worauf die Gleichung durch bloße Division gelöst wird.

In den Fällen endlich, in welchen die Gleichung VII. zur Anwendung kommt, kann wohl kaum um etwas Anderes als um den Jetzt- oder Vorwerth K gefragt werden; dabei bleibt natürlich nichts Anderes übrig, als sowohl die Glieder des Dividends, wie $A_1 q^{n_4 - n_1}$, $A_2 q^{n_4 - n_2}$ u. s. w., als auch q^{n_4} im Divisor einzeln logarithmisch zu rechnen, hierauf aber zu summiren und zu dividiren.

Beispiele.

1. Jemand, welcher im Alter von 24 Jahren sein Leben für 3000 fl. versichert hat, bezahlt hiefür einen jährlichen Beitrag

von 63 $^1/_2$ fl.: vorausgesetzt nun, daß die Versicherungs-Anstalt den Versicherten 3 $^1/_2$ % berechne, fragt sich, welches ist die angenommene mittlere Lebensdauer, der jener Beitrag entspricht?

Auflösung. Nach dem, was wir in §. 117. unter C. I) gesagt, haben wir hier die Gleichung IX. anzuwenden, und zwar werden wir dieß am besten in der Form thun:

$$(S\,(q-1)+A) = Aq^{n+1}.$$

Wir haben also:

$$(3000\,.\,(1{,}035-1)+63{,}5) = 63{,}5\times 1{,}035^{n+1},$$

$$105+63{,}5 = 168{,}5 = 63{,}5\times 1{,}035^{n+1}$$

$$\text{Log}\,168{,}5 = \text{Log}\,63{,}5 + (n+1)\,\text{Log}\,1{,}035$$

$$n+1 = \frac{\text{Log}\,168{,}5 - \text{Log}\,63{,}5}{\text{Log}\,1{,}035},$$

$$n+1 = 28{,}36\ldots,$$

mithin $n = 27{,}36$ ....

Diese Zeit von 27,36 .... Jahren, auf welche die Leistung der Beiträge berechnet ist, gibt zusammen mit dem bereits beim Eintritte erreichten Alter von 24 Jahren eine angenommene mittlere Lebensdauer von ungefähr 51 $^1/_3$ Jahren.

---

2. Die Bevölkerung der Vereinigten Staaten von Nord-Amerika stieg nach Ungewitter von 1790, wo sie 3929800 Seelen betragen hatte, bis 1830 ziemlich regelmäßig bis auf 12966800 an, von da aber bis 1840 in rascher Zunahme auf 17100600. Wenn wir nun annehmen, daß die natürliche Vermehrung (durch den Ueberschuß der Geburten über die Sterbfälle) in diesen beiden Perioden gleicherweise etwa 1 $^1/_4$ % betragen habe, wie groß muß in jeder derselben die durchschnittliche jährliche Einwanderung gewesen sein?

Auflösung. Natürlich haben wir die beiden Perioden gesondert zu behandeln.

a) In der ersten ist der ursprüngliche Betrag $K = 3929800$: er vermehrt sich jährlich um 1 $^1/_4$ %; aber da er dieser Vermehrung ungeachtet in den 40 Jahren von 1790—1830 keineswegs den in dem letzten Jahre Statt findenden Betrag $S = 12966800$ erreicht hätte, so muß ein jährlicher

Zuschuß A (durch Einwanderung) Statt gefunden haben, welcher in Verbindung mit dem ursprünglichen Betrage den eben angegebenen Gesammt-Betrag erzielt hat. Wir haben also offenbar den Fall C. des §. 117. und zwar die Gleichung VIII., nemlich:

$$S = Kq^n + \frac{Aq^n - A}{q - 1}.$$

Substituiren wir gemäß unserer Angabe, so ist:

$$12966800 = 3929800 \times 1{,}0125^{40} + \frac{A(1{,}0125^{40} - 1)}{1{,}0125 - 1},$$

$$162085 = 49122{,}5 \times 1{,}0125^{40} + A(1{,}0125^{40} - 1).$$

Nun wird $1{,}0125^{40}$ logarithmisch berechnet und findet sich $= 1{,}64361$; mithin erhalten wir:

$$A \times 0{,}64361 = 162085 - 49122{,}5 \times 1{,}64361$$
$$= 162085 - 80738,$$
$$\text{oder } A = \frac{81347}{0{,}64361} = 126392.$$

b) Für die zweite Periode ist die Aufgabe die nämliche: der ursprüngliche Betrag K ist hier $= 12966800$, der nach 10 Jahren erreichte Gesammtbetrag $S = 17100600$. Wir erhalten sonach:

$$17100600 = 12966800 \times 1{,}0125^{10} + \frac{A(1{,}0125^{10} - 1)}{0{,}0125},$$

$$213757{,}5 = 162085 \times 1{,}0125^{10} + A(1{,}0125^{10} - 1).$$

Nun ist $1{,}0125^{10} = 1{,}13227$, mithin

$$A \times 0{,}13227 = 213757{,}5 - 162085 \times 1{,}13227,$$
$$= 213757{,}5 - 183523,$$
$$A = \frac{30234{,}5}{0{,}13227} = 228582.$$

Es sind also in der ersten Periode durchschnittlich 126392, in der zweiten 228582 Personen jährlich eingewandert.

---

3) Eine 10jährige Rente von 1000 fl. wird um 8000 fl. angekauft; zu wie viel Prozent rentirt sich diese Summe?

Auflösung. Wir haben hier offenbar sowohl nach B. I. a) als nach C. II. c. des §. 117 den Fall der Gleichung III., nemlich:

$$Kq^n = \frac{Aq^n - A}{q - 1}.$$

Substituiren wir gemäß unserer Angabe, so wird

$$8000.q^{10} = \frac{1000q^{10} - 1000}{q - 1},$$

$$8q^{11} - 8q^{10} = q^{10} - 1,$$

$$8q^{11} - 9q^{10} + 1 = 0.$$

Offenbar wäre hier $q = 1$, denn $8 - 9 + 1 = 0$, allein es ist schon in der Einleitung zu diesem §. gesagt, daß dieser Werth nicht statthaft ist; durch das demselben entsprechende Wurzel-Aggregat $(q - 1)$ dividiren wir nun unsere Gleichung, nicht, um sie um einen Grad herabzubringen, sondern nur, um aus den dabei sich ergebenden Zeichen der Glieder auf die Zeichen der Wurzeln schließen zu können. Durch diese Division erhalten wir:

$$8q^{10} - q^9 - q^8 - q^7 - q^6 - q^5 - q^4 - q^3 - q^2 - q - 1 = 0,$$

woraus wir denn ersehen, daß unsere Gleichung nur Eine positive Wurzel hat. Diese findet sich dem durch Annäherungs-Versuche mit

$$q = 1{,}042775,$$

indem $8 \times (1{,}042775)^{11} - 9 \times (1{,}042775)^{10} + 1$

$= 8 \times 1{,}585245(5 - 9 \times 1{,}520218(38 + 1$

$= 12{,}681964 - 13{,}681965 + 1$

$= -0{,}000001$, gewiß sehr nahe $= 0$.

Die Ankaufs-Summe rentirt sich somit auf

$$4{,}2775 = 4\,\frac{111}{400}\,\%.$$

Die übrigen Werthe haben als negative insoferne keinen eigentlichen Sinn, als sie gemäß

$$\frac{100 + p}{100} = -q,$$

woraus $p = -(100 + 100q)$,

auch auf negative Prozente führen, von denen natürlich nach der allgemein gebräuchlichen Bedeutung des Wortes keine Rede sein kann. Verfolgen wir jedoch einen solchen negativen Werth, wie er sich in roher Annäherung mit

$$q = -0{,}8, \text{ woraus } p = -180,$$

bietet, in dem Sinne, daß umgekehrt statt des Gläubigers der jedesmalige Schuldner die Zinsen, hier zu 180%, genießt, so findet sich das Resultat der so geführten Rechnung*) mit den Bedingungen unserer Aufgabe ebenfalls in ganz gutem Einklange.

---

*) Diese Rechnung hier selbst durchzuführen, wäre wohl nicht am rechten Orte.

4) Eine Waldung von 176 Tagwerken soll zum Verkaufe angeschätzt und der Schätzung folgende Angaben zu Grunde gelegt werden:

Dieselbe besteht aus fünf verschiedenen Beständen, und zwar ist der 1te von 32 Tagwerken gerade haubar,

2te	„	45	„	70 jährig,
3te	„	38	„	45 „
4te	„	26	„	28 „
5te	„	35	„	15 „

wobei die Umtriebs-, resp. Abtriebs-Zeit zu 90 Jahren angenommen ist.

Die Zwischen- und kleinern Nutzungen überhaupt, an Streu, Dürrholz, bei der Bestandsreinigung u. dgl. gehen gerade für Arbeitslöhne, Aufsicht u. s. w. auf, so daß als eigentliche Nutzung nur das anzusehen ist, was sich beim jedesmaligen Abtriebe einer Parzelle an Scheit- und Stockholz ergibt. Das aber beträgt auf das Tagwerk 50 Klafter Scheitholz im Durchschnittswerthe von 4 fl. 30 kr., und 12 Klafter Stockholz à 2 fl.

Wie hoch berechnet sich hienach der Werth dieser Waldung (zu 4%)?

Auflösung I. Der Ertrag, welchen je ein Tagwerk beim Abtriebe bietet, berechnet sich auf $50 \times 4\frac{1}{2}$ fl. $+ 12 \times 2$ fl. $= 249$ fl.; dieß voraus bemerkt, läßt sich nun der Gesammt-Ertrag in zwei Theilen darstellen, nemlich:

a) Die 32 Tagwerke eben haubaren Bestandes geben einen Baar-Ertrag von 32×249 fl. $= 7968$ fl., und dieß ist der erste Posten des gesammten Baarwerthes;

b) hierauf folgen die in 90jähriger Periode sich wiederholenden Erträgnisse und zwar

ein 1stes oder A_1 nach $90 - 70 = 20$ Jahren im Betrage von $45 \times 249 = 11205$ fl.;
„ 2tes „ A_2 „ $90 - 45 = 45$ „ „ „ „ $38 \times 249 = 9462$ fl.;
„ 3tes „ A_3 „ $90 - 28 = 62$ „ „ „ „ $26 \times 249 = 6474$ fl.;
„ 4tes „ A_4 „ $90 - 15 = 75$ „ „ „ „ $35 \times 249 = 8715$ fl.;
„ 5tes „ A_5 „ $90 - 0 = 90$ „ „ „ „ $32 \times 249 = 7968$ fl.;

Diese Beträge reduziren wir nach Vorschrift des §. 117. B. II. auf das Ende der Periode, d. h. bestimmen ihre für diesen Zeitpunkt Statt findenden Werthe, wobei wir erhalten:

$S_1 = A_1 q^{90-20} = A_1 q^{70} = 11205 \times 1{,}04^{70} = 174479;$
$S_2 = A_2 q^{90-45} = A_2 q^{45} = 9462 \times 1{,}04^{45} = 55269;$
$S_3 = A_3 q^{90-62} = A_3 q^{28} = 6474 \times 1{,}04^{28} = 19413{,}5;$
$S_4 = A_4 q^{90-75} = A_4 q^{15} = 8715 \times 1{,}04^{15} = 15695{,}2;$
$S_5 = A_5 q^{90-90} = A_5 q^0 = 7968;$

mithin ist $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = S = 272824{,}7$.

Dieses Erträgniß von 272824,7 fl. kehrt alle 90 Jahre wieder, mithin ist gemäß Gleichung VI. der Baarwerth

$$K = \frac{272824{,}7}{1{,}04^{90} - 1} = \frac{272824{,}7}{33{,}11905} = 8237{,}7 \text{ fl.}$$

Demnach haben wir folgende Baarwerthe:
aus a) 7968 fl.,
aus b) 8237,7 fl.,

zusammen 16205,7 fl. als gesammten Werth obiger Waldung.

Auflösung II. Dieselbe Aufgabe läßt sich auch in folgender Weise behandeln:

a) Man suche zuerst den Baarwerth der aus den fünf Beständen sich ergebenden erstmaligen Erträgnisse, nemlich von

1) $A_1 = 7968$ fl. nach 0 Jahren,
2) $A_2 = 11205$ fl. „ 20 „
3) $A_3 = 9462$ fl. „ 45 „
4) $A_4 = 6474$ fl. „ 62 „
5) $A_5 = 8715$ fl. „ 75 „

Die entsprechenden Baarwerthe sind:

$$K_1 = \frac{A_1}{q^0} = 7968 \text{ fl.},$$

$$K_2 = \frac{A_2}{q^{20}} = \frac{11205}{1{,}04^{20}} = 5113{,}826 \text{ fl.},$$

$$K_3 = \frac{A_3}{q^{45}} = \frac{9462}{1{,}04^{45}} = 1619{,}886 \text{ fl.},$$

$$K_4 = \frac{A_4}{q^{62}} = \frac{6474}{1{,}04^{62}} = 568{,}994 \text{ fl.},$$

$$K_5 = \frac{A_5}{q^{75}} = \frac{8715}{1{,}04^{75}} = 460{,}013 \text{ fl.};$$

zusammen = 15730,719 fl. als der Baarwerth der erstmaligen Erträgnisse.

b) Dieses Erträgniß wiederholt sich aber je nach 90 Jahren fort und fort; mithin ist der Werth dieser periodischen Erträgnisse gemäß Gleichung VI.:

$$K' = \frac{15730{,}719}{1{,}04^{90} - 1} = \frac{15730{,}719}{33{,}11905} = 474{,}974 \text{ fl.}$$

Demnach haben wir:

aus a)	15730,719	fl.,
aus b)	474,974	fl.,
zusammen	16205,7	fl. wie oben.

Druckfehler:

Seite 101 Zeile 3 von unten lies $x-(m+1)$ statt $x-(m+3)$.
„ 102 „ 1 „ oben „ b^{m+1} statt b^{m+2}.
„ 102 „ 5 „ „ „ b^5 statt b^9.
„ 146 „ 8 „ unten „ $(n-1)$ statt $(u-1)$.
„ 250 „ 5 „ oben „ „der“ statt „die“.

Im Verlage von G. J. Manz in Regensburg ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Arendts, Prof. (am k. Cadettencorps) Dr. C., Leitfaden für den ersten wissenschaftlichen Unterricht in der **Geographie.** 2te, verb. Aufl. 8. (12 ½ Bogen.) 36 kr. od. 9 gr.

Emmerig, W. J., Anleitung zur **lateinischen Versekunst.** Umgearbeitet und bereichert mit einer deutschen und griechischen Verslehre nebst einer Auswahl von Gedichten aus klassischen Auktoren von Dr. J. B. Goßmann. 7te, abermals verb. und verm. Auflage. gr. 8. 1 fl. 24 kr. od. 20 gr.

Fürnrohr, Dr. A. E., Lehrbuch der **technischen Chemie** für den ersten Unterricht an Gewerbsschulen. 3te, verb. u. verm. Aufl. gr. 8. 1 fl. 20 kr. od. 20 gr.

Hanser's, G., Schulatlas, über alle Theile der Erde und das Wichtigste über das Weltgebäude. Revidirt und zum Theil umgearbeitet von Dr. C. **Arendts**, Prof. am k. bayr. Cadettencorps. 5te, vermehrte und verbesserte Aufl. (Allgem. Ausg. mit 25 illum. Karten in Stahlst.) qu. gr. Fol. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 2 gr.

Die allerhöchste Entschließung des königlichen Ministeriums des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten vom 2. April 1847 an die königl. Rectorate und Subrectorate der Studien- und technischen Lehranstalten ꝛc. sagt hierüber:

„Da nach dem Ergebnisse sachkundiger Prüfung vorstehender Atlas Vorzüge besitzt, welche ihn zum Gebrauche in den Studien- und technischen Lehranstalten eignen, so wird er den erwähnten Lehranstalten empfohlen ꝛc."

Schon vor dieser allerhöchsten Entschließung fand in den meisten vaterländischen und mehren auswärtigen Lehranstalten die Einführung statt, so daß seit 1847 fünf Auflagen erschienen sind, welche stets Verbesserungen, Nachträge und Vermehrungen erhielten. Die gegenwärtige fünfte Auflage wurde mit einer neuen Karte: „Oro-hydrographische Karte von Europa" vermehrt. Was die Ausführung der oro-hydrographischen Karte betrifft, so ist bisher im Kartenstiche noch nichts Vollendeteres geliefert worden, wie man sich leicht aus dem Augenscheine überzeugen kann.

Hievon erschienen noch folgende besondere Ausgaben:

— — dasselbe. Für die k. k. **Oesterreichischen Staaten** mit **31** Karten. 2 fl. 15 kr. od. 1 Thlr. 8 gr.

— — dasselbe. Für die k. **Preußischen Staaten** mit **30** Karten. 2 fl. 8 kr. od. 1 Thlr. 6 gr.

— — dasselbe. Für **Sachsen** und die **Staaten in Thüringen** mit **26** Karten. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 2 gr.

— — dasselbe. Für **Hannover, Oldenburg, Braunschweig, Holstein, Schleswig, Lippe-Detmold, Schaumburg-Lippe, Hamburg, Bremen** und **Lübeck** mit **25** Karten. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 2 gr.

— — dasselbe. Für **Mecklenburg** mit **25** Karten. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 2 gr.

— — dasselbe. Für **Hessen-Kassel, Hessen-Darmstadt, Nassau, Waldeck, Homburg, Frankfurt a. M., Limburg** und **Luxemburg** mit **26** Karten. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 2 gr.

Heilmann, J., Geschichte Bayerns. gr. 8. geh. 1 fl. od. 20 sgr.

Der Hr. Verfasser, welcher sich bereits mehrfach als tüchtiger Geschichtsforscher bewährte, übergibt hiemit eine „Geschichte Bayerns" fortgeführt bis auf die neueste Zeit, welche sich namentlich zum Unterrichte in den höhern Bildungsanstalten eignen dürfte, und welche aber auch für jeden Geschichtsfreund

ein lehrreiches Lehrbuch bildet. — Dem Werke ist ein alphabetisches Inhaltsverzeichniß beigegeben.

Goßmann, Prof., Dr. J. B., Lehrbuch der **Geographie** für lateinische Schulen u. verwandte Lehranstalten. Nach den neuern Ansichten bearbeitet in **vier** Abtheilungen. gr. 8. (22 Bogen.) 1 fl. od. 16 gr.

— — **Lehrbuch** der **Geographie** für höhere Unterrichtsanstalten und zum Privatgebrauche. Nach den neuern Ansichten bearbeitet. gr. 8. 1 fl. 21 kr. od. 20 gr.

— — Beschreibung des Königreiches **Bayern.** Für gereiftere Zöglinge. gr. 8. geh. 30 kr. od. 8 gr.

Huther, P., Anfangsgründe der **Geometrie**, vorzüglich zum Gebrauche an technischen Schulen. Mit 6 Figurentafeln (in 4.) gr. 8. 1 fl. od. 15 gr.

Jüngling, G., Sammlung von Aufgaben und Aufsätzen aus Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie, nebst den Grundzügen der neuern Geometrie. Mit 3 Figurentafeln. gr. 8. 1 fl. 24 kr. od. 21 gr.

Kelle, Joh. Nep., vollständiges Lehrbuch der **deutschen Sprache** mit Aufgaben. Namentlich zum Schulgebrauche bearbeitet. gr. 8. (396 Seiten.) 1 fl. 12 kr. od. 18 gr.

Wir enthalten uns aller Anpreisung dieses Buches, und bemerken nur, daß es durch eine königl. **Ministerial-Entschließung** vom 21. September 1852 allen Schullehrern, Schullehrlingen, Vorbereitungslehrern der Schullehrlinge und Schullehrerseminarien im ganzen **Königreiche** empfohlen worden ist. Eine der größten Autoritäten in diesen Dingen: **H. A. Schmeller** sagte von diesem Lehrbuche in Nro. 26 der „Münchner gelehrten Anzeigen," „daß die Bearbeitung eines solchen Buches eine Aufgabe sei, zu der, abgesehen von sonstiger Tüchtigkeit und Liebe zur Sache nur ein gewisses Maß von Zuversicht, ja von Aufopferungskraft befähigen und ermuthigen könne." — Die **A. Allgemeine Zeitung** bemerkt in Beilage zu Nro. 220, „das Buch verdiene Empfehlung in weiten Kreisen, und habe einen neuen, und den richtigsten Weg zum Unterricht in der Muttersprache eingeschlagen" — und die „**neue Münchener Zeitung**" nennt das Buch in Beilage zu Nro. 63 „eine Erscheinung, die für den Unterricht gewiß nicht ohne einflußreiche Folgen sein wird, und bezeichnet es als ein Glück und als Epoche machend, daß ein solches Lehrbuch aufgetaucht." — Die **pädagogische Monatschrift** (herausg. von Rector Löw in Magdeburg sagt unter Anderm in Heft 7. p. 556: „Das Buch verdient eine dringende Empfehlung überall, wo man es für angemessen hält, einen sehr reichlichen, systematischen Unterricht in der Sprachlehre zu geben und die Grammatik zum Mittelpunkte des gesammten deutschen Unterrichts zu machen."

— — systematisches **Lehrbuch** der **deutschen Sprache** mit Uebungen. Zunächst für Real- und Gewerbsschulen, sowie für lateinische und höhere Bürgerschulen bearbeitet. gr. 8. 45 kr. od. 12 gr.

Schmöger, Dr. F. v., Grundlinien der allgemeinen Chemie zum Gebrauche bei Vorlesungen. gr. 8. 1 fl. 12 kr. od. 18 gr.

Wandner, Dr. J. B., Lehrbuch der technischen Mechanik, zum Gebrauche an Gewerbsschulen und beim Selbstunterrichte. Mit 9 Figurentafeln (in gr. 4.) gr. 8. 1 fl. 45 kr. od. 1 Thlr. 3 gr.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bischoff, Ant.

System der Elementar-Mathematik

Bd.: Thl. 1

Regensburg 1853

Math.p. 43 gs-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081465-2